



# جبر

## فهرست مندرجات

صفحه

عنوان

### فصل اول

۱	مراجعة به برنامه دوره اول
۶	قوای اعداد جبری
۱۱	عبارتهای متعادل - اتحادها
۱۶	دو جمله‌ای - دستور بینم
۲۵	تجزیه عبارت جبری به حاصل ضرب عوامل
۳۱	موارد استعمال تجزیه
۳۶	جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کسرها

### فصل دوم

۶۱	ریشه اعداد و اعمال مربوط به آن
----	--------------------------------

### فصل سوم

۸۶	معادله درجه اول يك مجهولی
۹۲	حل معادلات اصم قابل تبدیل به معادلات درجه اول

### فصل چهارم

۱۰۳	نامساویها
۱۰۳	خواص اصلی نامساویها
۱۰۷	نامعادله يك مجهولی درجه اول
۱۱۱	تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول

## فصل پنجم

- ۱۲۱ حل دستگاههای چند مجهولی درجه اول

## فصل ششم

- ۱۴۲ حل و بحث مسائل درجه اول

## فصل هفتم

- ۱۵۴ حل معادله  $یک$  مجهولی درجه دوم

- ۱۶۴ روابط بین ضرایب و ریشههای معادله درجه دوم

- ۱۶۹ موارد استعمال مجموع و حاصل ضرب ریشهها

- ۱۷۲ بحث در وجود و علامت ریشههای معادله درجه دوم

## فصل هشتم

تجزیه سه جمله ای درجه دوم - علامت سه جمله ای

- ۱۹۴ درجه دوم - نامعادله های درجه دوم

## فصل نهم

- ۲۱۵ حل معادلاتی که به درجه دوم تبدیل پذیرند

- ۲۴۵ حل مسائل عددی درجه دوم

- ۲۵۳ رادیکالهای مرکب

## فصل اول

### مراجعه به برنامه دوره اول

۱ - عبارت جبری، مجموعه‌ای است از اعداد و حروف که به وسیلهٔ علامات ششگانهٔ جمع، تفریق، ضرب، قوه، تقسیم و ریشه به هم مربوط شده باشند؛ مانند:

$$ax^2 - 3x + 2 \text{ و } 4a - \sqrt{5} \text{ و } \sqrt{x} - 2x^2 \text{ و } \frac{a(2a+b)^2}{5c}$$

۲ - عبارت جبری را منطق (گویا) گویند هرگاه در آن عبارت هیچ حرفی در زیر رادیکال واقع نباشد؛ در غیر این صورت، عبارت جبری را اصم (کنگ) می‌نامند.

مثال: عبارت‌های جبری  $\frac{a^2 - b^2}{4c^2}$ ،  $4a\sqrt{5}$ ،  $3a^4b$ ،  $ab^2$

گویند اصم هستند.  $x^2 - 4x + 6$  و  $(x+1)^2$

عبارت‌های  $3b\sqrt{2x}$  و  $2a\sqrt{b-1}$  عبارت جبری اصم می‌باشند. عبارت جبری منطق را صحیح گویند هرگاه آن عبارت شامل حرفی در مخرج نباشد؛ در غیر این صورت عبارت جبری را کسری می‌نامند.

مثال: عبارت‌های جبری  $\frac{2a+3b}{y}$  و  $x^2 - 4x + 5$  صحیح و

عبارات جبری  $\frac{a - 5b}{2c}$  و  $\frac{2x - y + 1}{x - 2}$  سری هستند .

۳ - جمله یا يك جمله ای ، عبارتی است جبری که بین اجزای مختلف آن دو عمل جمع و تفریق وجود نداشته باشد . مانند :  $5a$  و

$$-\frac{2}{3}x \text{ و } \frac{x}{2\sqrt{y}} \text{ و } \frac{4}{3}a^2b\sqrt{x}$$

از این تعریف که برای يك جمله ای کردیم چنین بر می آید که يك جمله ای از نظر کلی ممکن است صحیح یا منطقی و کسری و یا اسم باشد ؛ اما دقیقاً باید متذکر بود که ضمن عملیات جبری و اثبات قضایا و بطور کلی در هر مورد که ذکرى از جمله یا يك جمله ای به میان آید مقصود يك جمله ای صحیح ، یعنی يك عبارت جبری به صورت  $Ax^my^nz^p$  است که در آن ،  $A$  نمایش يك ضرب عددی ( مثبت یا منفی ) و  $x$  و  $y$  و  $z$  حروف يك جمله ای و  $m$  و  $n$  و  $p$  نمایش اعداد صحیح مثبت یا صفرند .

مثلاً اگر ضرب عددی يك جمله ای :  $A = -\frac{5}{3}$  و  $m = 3$  و  $n = 4$  و  $p = 2$  باشد ، يك جمله ای نامبرده به این صورت خواهد بود :

$$-\frac{5}{3}x^3y^4z^2$$

در يك جمله ای  $Ax^my^nz^p$  قسمت  $x^my^nz^p$  را قسمت حرفی يك جمله ای می نامند .

وقتی که  $A = +1$  باشد يك جمله ای  $Ax^my^nz^p$  را به صورت :  $x^my^nz^p$  و اگر  $A = -1$  باشد يك جمله ای مذکور را به صورت :

$$-x^my^nz^p \text{ می نویسند .}$$

۴ - ضرب يك جمله ای نسبت به يك حرف ، عبارت است از حاصل عملیاتی که روی اعداد و سایر حروف آن جمله انجام شده باشد . ضرب يك جمله ای  $(-\frac{2}{3}a^2bx)$  نسبت به حرف  $x$  عبارت است از :

$$(-\frac{2}{3}a^2b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3}ab \text{ نسبت به حرف } x \text{ می شود;} \\ \frac{1}{3}ax \text{ نسبت به حرف } b \text{ می شود;} \\ \frac{1}{3}bx \text{ نسبت به حرف } a \text{ می شود;} \end{array} \right\} \text{ همچنین ضرب جمله } \frac{2}{3}a \times \frac{3}{4}bx$$

۵ - درجه يك جمله ای صحیح نسبت به يك حرف ، عبارت است از نمای آن حرف ؛ مثلاً يك جمله ای  $2ab^2x^3$  نسبت به حرف  $a$  از درجه اول و نسبت به حرف  $b$  از درجه دوم و نسبت به حرف  $x$  از درجه سوم است .

تبصره - هرگاه يك جمله ای فاقد حرف مفروضی باشد ، درجه يك جمله ای نسبت به آن حرف صفر است ؛ مثلاً درجه يك جمله ای  $2ab^2x^3$  نسبت به حرف  $c$  صفر است .

۶ - درجه يك جمله ای صحیح نسبت به چند حرف ، عبارت است از مجموع نماینده های آن حروف ؛ مثلاً يك جمله ای  $2ab^2x^3$  نسبت به حروف  $a$  و  $b$  از درجه سوم و نسبت به حروف  $a$  و  $x$  از درجه چهارم و نسبت به حروف  $b$  و  $x$  از درجه پنجم و نسبت به سه حرف  $a$  و  $b$  و  $x$  از درجه ششم است .

۷ - جمله‌های متشابه - دو جمله را متشابه گویند هرگاه اختلاف آنها منحصر آ در ضریبهایشان باشد؛ مثلاً دو جمله  $2ab$  و  $-3ab$  متشابهند؛ همچنین جمله‌هایی نظیر  $3x^2$  و  $-x^2$  و  $\frac{1}{3}x^2$  و  $\sqrt{2}x^2$  نیز متشابهند.

۸ - مجموع جبری چندین جمله متشابه مفروض، جمله‌ای است متشابه با هر يك از آنها که ضریبش مجموع جبری ضریبهای جمله متشابه مفروض باشد. مثلاً مجموع جبری جمله‌های متشابه:

$$4a - a \text{ و } -8a \text{ و } 3a \text{ و } a$$

جمله  $(-a)$  می‌شود.

۹ - چندجمله‌ای، عبارت است از مجموع جبری چندین يك جمله‌ای؛ به عبارت دیگر، چندجمله‌ای عبارتی است جبری مرکب از چندین يك جمله‌ای که به وسیله علامتهای  $(+)$  و  $(-)$  به یکدیگر پیوسته باشند؛ مانند عبارت:

$$4a^2b - 2ab^2 - 5ab^2 \quad (۱)$$

هر يك از جمله‌های موجود در چند جمله‌ای را توأم با علامتی که طرف چپ آن جمله قرار دارد يك جمله از چندجمله‌ای می‌نامند؛ بنابراین جمله‌های چندجمله‌ای (۱) عبارتند از:

$$4a^2b \text{ و } -2ab^2 \text{ و } -5ab^2$$

یا بطور خلاصه  $4a^2b$  و  $-2ab^2$  و  $-5ab^2$

۱۰ - يك چندجمله‌ای شامل حرفی مانند  $x$  را نسبت به این حرف صحیح گویند هرگاه حرف  $x$  در مخرج نباشد و بعلاوه نماینده‌های  $x$  در جمله‌های مختلف چندجمله‌ای همگی صحیح و مثبت باشند.

مثلاً چندجمله‌ای  $6 + 4x + 2x^2 - 7x^5$  نسبت به حرف  $x$  صحیح است.

۱۱ - چندجمله‌ای صحیح نسبت به حرفی مانند  $x$  را بر حسب این حرف وقتی کامل می‌گویند که جمیع قوای نزولی یا صعودی  $x$  را (از بزرگترین قوه موجود تا توان صفر یا بعکس) داشته باشد؛ (توان صفر  $x$  جمله‌ای مستقل از  $x$  خواهد بود).

مثلاً چهار جمله‌ای:  $ax^2 + cx + bx^3 + d$  بر حسب  $x$  کامل و سه جمله‌ای:  $ax^2 + cx + d$  بر حسب  $x$  ناقص است.

تبصره - چندجمله‌ای ناقص از حرفی مانند  $x$  را با افزودن جمله‌های مناسب که ضرایب آنها صفر باشد می‌توان به صورت چندجمله‌ای کامل درآورد؛ مثلاً سه جمله‌ای ناقص  $ax^2 + bx^3 + c$  را می‌توان به صورت چندجمله‌ای کامل زیر نوشت:

$$ax^2 + 0 \times x^3 + bx^3 + 0 \times x + c$$

۱۲ - درجه چندجمله‌ای صحیح نسبت به يك حرف عبارت است از بزرگترین نمای آن حرف در آن چندجمله‌ای.

درجه چندجمله‌ای نسبت به چند حرف، عبارت است از درجه جمله‌ای از آن که نسبت به حروف مورد نظر بزرگترین درجه را داراست؛ مثلاً چند جمله‌ای:  $3a^2x^3 + 2a^2x^5 - 5a^2x^7$  نسبت به حرف  $a$  از درجه چهارم و نسبت به حرف  $x$  از درجه ششم و نسبت به حروف  $a$  و  $x$  از درجه نهم است.

۱۳ - مرتب کردن چندجمله‌ای بر حسب قوای نزولی یا صعودی يك حرف، یعنی جمله‌های چندجمله‌ای طوری نوشته شوند که نماینده‌های حرف مورد نظر، از هر جمله به جمله بعدی، بترتیب کم یا

بترتیب زیاد شوند؛ در حالت اول، چند جمله‌ای بر حسب قوای نزولی - آن حرف و در حالت دوم، بر حسب قوای صعودی آن حرف مرتب شده است.

مثلاً چند جمله‌ای :  $a^3 + 3a^2b + ab^2 + b^3$  بر حسب قوای نزولی  $a$  و بر حسب قوای صعودی  $b$  مرتب شده است .  
**۱۴ - پرانتز برداری -** اگر جلوی پرانتزی علامت  $(+)$  باشد، می‌توان علامت  $(+)$  و پرانتز را حذف کرد . چنانچه جلوی پرانتزی علامت :  $-$  (منها) باشد، باز هم می‌توان علامت :  $-$  (منها) و پرانتز را حذف کرد به شرط اینکه علامتهای تمام جمله‌های درون پرانتز را تغییر دهیم .

### قوای اعداد جبری

**۱۵ -** هرگاه عددی چند مرتبه در خود ضرب شود، گویند آن عدد به توان رسیده است :

$$۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸ \text{ یا } (-۴)^۲ = (-۴)(-۴) = +۱۶$$

عددی را که در خود ضرب می‌شود، پایه و عددهای دفعاتی را که آن عدد در خود ضرب شده است **نما** یا **نماینده** می‌گویند. در مثال اول ۲ را پایه و ۳ را **نما** و در مثال دوم  $(-۴)$  را پایه و ۲ را **نما** می‌گویند.  
**۱۶ -** در جمع و تفریق توانها، ابتدا باید حاصل هر یک از توانها را حساب کرد و سپس عمل جمع یا تفریق را درباره حاصلها انجام داد.

**مثال :**

$$(+۸) - (+۲۵) + (-۳۲) = (-۳۲) + (-۵) + (-۲) \\ = -۳۲ - ۲۵ - ۸ = -۶۵$$

**۱۷ -** در ضرب توانها چند حالت اتفاق می‌افتد :

**حالت اول - پایه‌های عوامل ضرب متساوی و نماهای آنها مختلف**

است : در این حالت، حاصل ضرب توانهای مفروض به این ترتیب بدست می‌آید که پایه یکی از عوامل ضرب را نوشته و نمای آن را مساوی مجموع نماهای عوامل ضرب قرار دهیم .

$$۲^۳ \times ۲^۵ = ۲^{۳+۵} = ۲^۸ \text{ و } x^۳ \times x = x^{۳+۱} = x^۴$$

$$(-۴)^۳ \cdot (-۴)^۶ = (-۴)^{۳+۶} = (-۴)^۹$$

$$a^۳ \times a \times a^۳ = a^{۳+۱+۳} = a^۷ \quad \text{و}$$

**حالت دوم - پایه‌های عوامل ضرب مختلف و نماهای آنها متساویند :**

در این حالت، حاصل ضرب توانهای مفروض به این ترتیب بدست می‌آید که پایه‌های عوامل ضرب را در هم ضرب کرده نتیجه عمل را پایه قرار دهیم و برای این پایه نماینده‌ای مساوی با نماینده یکی از عوامل ضرب بنویسیم .

$$۳^۴ \times ۵^۴ = (۳ \times ۵)^۴ = ۱۵^۴$$

$$(-۲)^۴ \cdot (+۵)^۴ = [(-۲)(+۵)]^۴ = (-۱۰)^۴$$

$$\left(\frac{۲}{۴}\right)^۲ \cdot \left(-\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \left[\left(\frac{۲}{۴}\right) \cdot \left(-\frac{۲}{۳}\right)\right]^۲ = \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲$$

در این حالت، خارج قسمت توانهای مفروض به این ترتیب بدست می آید که پایه مقسوم یا مقسوم علیه را نوشته و نمای آن را مساوی باقیمانده تقریق نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم قرار دهیم .

$$۴۵:۳ = \frac{۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴}{۴ \times ۴ \times ۴} = ۴۵ - ۳ = ۴۲$$

$$a^r : a = \frac{a \times a \times a}{a} = a^{r-1} = a^2$$

حالت دوم - نماهای مقسوم و مقسوم علیه متساوی و پایه های آنها مختلف است :

در این حالت، خارج قسمت توانهای مفروض به این ترتیب بدست می آید که پایه مقسوم را بر پایه مقسوم علیه تقسیم کرده حاصل عمل را پایه قرار دهیم و برای این پایه نماینده ای مساوی با نماینده مقسوم یا مقسوم علیه بنویسیم .

$$۱۲:۴ = \left(\frac{۱۲}{۴}\right)^2 = ۳^2 \quad \text{و} \quad ۱۵^4:۱۰^4 = \left(\frac{۱۵}{۱۰}\right)^4 = \left(\frac{۳}{۲}\right)^4 = (۱/۵)^4$$

$$۱۸^3:۹^3 = \left(\frac{۱۸}{۹}\right)^3 = ۲^3 \quad \text{و} \quad x^m:y^m = \left(\frac{x}{y}\right)^m$$

حالت سوم - پایه های مقسوم و مقسوم علیه و نماهای آنها هر دو مختلفند .

در این حالت، مقسوم و مقسوم علیه را جدا جدا به توان رسانیده حاصل آنها را بر هم تقسیم می کنند .

$$۵^2:۲^3 = ۲۵:۸ = \frac{۲۵}{۸}$$

حالت چهارم - پایه های مقسوم و مقسوم علیه با هم و نماهای آنها نیز با هم مساویند .

حالت سوم - پایه های عوامل ضرب و همچنین نماهای آنها مختلف است :

در این حالت برای تعیین حاصل ضرب توانها، هر يك از عوامل ضرب را جداگانه به توان رسانیده و حاصل آنها را در هم ضرب می کنند.

$$5^2 \times 2^3 = ۲۵ \times ۸ = ۲۰۰$$

$$(-۱)^2 (+۲)^4 = (-۱)(+۱۶) = -۱۶$$

حالت چهارم - پایه های عوامل ضرب با هم و نماهای آنها نیز با هم متساویند :

در این حالت (حالت خاص از حالات اول و دوم) ، می توان طبق حالات اول یا دوم حاصل را بدست آورد .

مثال :

$$5^3 \times 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$$

طبق حالت اول :

$$5^3 \times 5^2 = (5 \times 5)^3 = (5^2)^3$$

طبق حالت دوم :

$$(5^2)^3 = 5^6$$

چون حاصل ضربها باید متساوی باشند ،  
یعنی : اگر بخواهیم توانی را به توان جدید برسانیم حاصل عمل به این ترتیب بدست می آید که پایه را نوشته و نماینده آن را برابر حاصل ضرب نمای قدیم و جدید قرار دهیم .

$$(-۳)^4 = ۲۱^2 \quad \text{و} \quad [(-۳)^2]^3 = (-۳)^6$$

مثال :

۱۸ - در تقسیم توانها هم مانند ضرب چند حالت اتفاق می افتد :

حالت اول - پایه های مقسوم و مقسوم علیه متساوی و نماهای

آنها مختلف است :

در این حالت (حالت خاص از حالات اول یا دوم)، می توان طبق حالت اول یا طبق حالت دوم عمل کرد.

$$5^2:5^2=5^{2-2}=5^0 \quad \text{طبق حالت اول:}$$

$$5^2:5^2=\left(\frac{5}{5}\right)^2=1^2=1 \quad \text{طبق حالت دوم:}$$

چون خارج قسمتها باید متساوی باشند،  $5^0=1$  یا در حالت کلی:

$$x^m:x^m=x^{m-m}=x^0$$

$$x^m:x^m=\left(\frac{x}{x}\right)^m=1^m=1$$

$$x^0=1$$

**نتیجه - تعریف - هر عدد به توان صفر، مساوی واحد است .**  
تبصره - در تقسیم توانها وقتی پایهها متساوی باشند (حالت اول)، چنانچه نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم بزرگتر باشد چنین خواهیم داشت:

$$x^2:x^5=x^{2-5}=x^{-3}$$

برای پیدا کردن حاصل این نمای منفی ( $x^{-3}$ )، تقسیم را به طریق دیگر انجام می دهیم:

$$x^2:x^5=\frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}=\frac{1}{x^3}$$

چون خارج قسمتها باید متساوی باشند،  $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$

**نتیجه - تعریف - توان منفی هر عدد جبری مساوی است با عکس آن عدد با توانی قرینه توان مقروض .**

$$x^{-2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

$$x^{-2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

$$b^{-1}=\left(\frac{1}{b}\right)^1=\frac{1}{b}$$

**«بهارتهای متعادل» = اتحادها**

**۹۹ - تعریف ۱ -** دو عبارت جبری را **متعادل (یا متحد)** گویند هرگاه به ازای هر دستگاه مقادیر عددی که به حروف آن دو عبارت نسبت داده شود، برای دو عبارت مزبور مقادیر عددی متساوی بدست آید .

**۴۵ - تعریف ۲ -** تساوی دو عبارت جبری متحد را **اتحاد** می نامند . از این تعریف نتیجه می شود: به ازای هر دستگاه مقادیر عددی که به حروف يك اتحاد نسبت داده شود، اتحاد برقرار است؛ علاوه بر این باید دانست که تساوی دو عبارت متحد (یعنی برقراری يك اتحاد)، به ازای هر دستگاه از عبارات جبری که به حروف آن دو عبارت نسبت داده شود محفوظ می ماند .

معمولا با عملیات جبری دو عبارت متحد را می توان به یکدیگر تبدیل کرد .

**۴۱ - اتحادهایی را که در سالهای گذشته آموخته اید و باید آنها را بخاطر سپرد، در اینجا به شرح زیر یادآوری می کنیم:**



اتحاد اول - مربع مجموع دوجمله :

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

مثال :

$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{16}$$

$$(3x^2 + 2y^3)^2 = 9x^4 + 12x^2y^3 + 4y^6$$

اتحاد دوم - مربع تفاضل دوجمله :

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

مثال :

$$\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 = 4x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

$$(2a^2b - 3ab^2)^2 = 4a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4$$

$$(2x^2 - 3y^3)^2 = 4x^4 - 12x^2y^3 + 9y^6$$

اتحاد سوم - اتحاد مزدوج :

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$$

مثال :

$$\left(x^2 + \frac{1}{\delta}\right)\left(x^2 - \frac{1}{\delta}\right) = x^4 - \frac{1}{\delta^2}$$

$$[(a+b)+c][(a+b)-c] = (a+b)^2 - c^2$$

$$[(2x+3y)-(a-2b)][(2x+3y)+(a-2b)] =$$

$$(2x+3y)^2 - (a-2b)^2$$

$$(3-2x)(2x+3) = 9-4x^2$$

$$(-5-ab)(-5+ab) = (-5)^2 - (ab)^2 = 25 - a^2b^2$$

اتحاد چهارم :

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$$

یعنی : حاصل ضرب دو پرانتز دوجمله‌ای که در یک جمله مشترکند به ترتیب زیر بدست می‌آید :

الف - جمله مشترک را به توان ۲ می‌رسانیم .

ب - مجموع جبری دو جمله غیر مشترک را در جمله مشترک

ضرب می‌کنیم .

ج - حاصل ضرب دوجمله غیر مشترک را تعیین می‌کنیم .

د - حاصلهای عملیات قسمتهای (الف و ب و ج) را با هم جمع

می‌کنیم .

نتیجه عاید از قسمت (د) حاصل ضرب مطلوب خواهد بود .

مثال :

$$(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15$$

$$(x-5)(x-3) = x^2 - 8x + 15$$

$$(x+5)(x-3) = x^2 + 2x - 15$$

$$(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$$

$$(2x-7)(2x+5) = 4x^2 - 4x - 35$$

$$(2a-2b)(2a+b) = 4a^2 - 2ab - 2b^2$$

اتحاد پنجم - مربع کثیرالاجمله‌ها :

مربع هر کثیرالاجمله مساوی است با مجموع مربعات هر یک از جمله‌هایش به علاوه مجموع جبری دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها که دو به دو و بدون تکرار اختیار شوند.

تذکره - در مورد مجذور کردن یک کثیرالاجمله ، ضمن اعمال

قاعده بالا ، برای مصون ماندن از اشتباه و احتراز از افزایش در نوشتن

$$(2a^2 + \frac{1}{y})^2 = 4a^4 + 4a^2 + \frac{1}{y^2}$$

اتحاد هفتم - مکعب تفاضل دو جمله :

$$(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال :

$$\begin{aligned} (x-5)^3 &= x^3 - 15x^2 + 75x - 125 \\ (2a^2 - 3b^2)^3 &= 8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6 \\ (\frac{1}{5}a - \frac{1}{6}b)^3 &= \frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{50}a^2b + \frac{1}{90}ab^2 - \frac{1}{216}b^3 \end{aligned}$$

اتحاد هشتم -

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$$

مثال :

$$\begin{aligned} (2x+1)(2x^2-2x+1) &= 8x^3+1 \\ (\frac{1}{y}a+1)(\frac{1}{y}a^2-\frac{1}{y}a+1) &= \frac{1}{\lambda}a^3+1 \\ (\frac{1}{y}+a)(\frac{1}{y}-\frac{a}{y}+a^2) &= \frac{1}{\lambda}+a^3 \end{aligned}$$

اتحاد نهم -

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3$$

مثال :

$$\begin{aligned} (2a-5b)(2a^2+10ab+25b^2) &= 8a^3-125b^3 \\ (6x^2-7y)(36x^2+42xy+49y^2) &= 216x^6-343y^3 \end{aligned}$$

بعضی از جمله‌ها ، بهتر است ابتدا مجموع مربعات تمام جمله‌ها و به دنبال آن مجموع جبری دوبار حاصل ضرب جمله‌ها که باید دوبار اختیار شوند نوشته شود . دوبار حاصل ضرب جمله‌ها نیز که باید دوبار اختیار شوند ، به این ترتیب بدست می‌آید که ابتدا دوبار جمله اول را متدرجاً در هر یک از جمله‌های بعدی بارعایت علامات ضرب کنیم و در مرحله دوم ، دوبار جمله دوم را متدرجاً در هر یک از جمله‌های بعد از آن بارعایت علامات ضرب کنیم و در مرحله سوم ، دوبار جمله سوم را متدرجاً در هر یک از جمله‌های بعدی ضرب کنیم و عمل را به همین روش برای جمله‌های چهارم و پنجم و ..... از کثیر الجمله مقروض ادامه دهیم تا کلیه جمله‌های لازم بدست آیند .

مثال :

$$\begin{aligned} (a-b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3-3ab+3ac-3bc \\ (2x^2-3x-1)^3 &= 8x^6+9x^2+1-12x^2-24x^2+6x \\ &= 8x^6-12x^2+5x^2+6x+1 \\ (a+b-c-d)^3 &= a^3+b^3+c^3+d^3+3ab-3ac \\ &\quad -3ad-3bc-3bd+3cd \\ (a-b+c-x+y)^3 &= a^3+b^3+c^3+x^3+y^3-3ab \\ &\quad +3ac-3ax+3ay-3bc+3bx \\ &\quad -3by-3cx+3cy-3xy \end{aligned}$$

اتحاد ششم - مکعب مجموع دو جمله :

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

مثال :

$$(2x+2y)^3 = 8x^3+24x^2y+24xy^2+8y^3$$

## دوجمله‌ای - دستور بینم (Binôme)

۲۲ - تعریف - هر عبارت جبری که فقط شامل دوجمله باشد، دوجمله‌ای یا بینم نام دارد.

۲۳ - دستور بینم - ضمن شماره (۲۱ این فصل)، حاصل عبارت‌های  $(a \pm b)^2$  و  $(a \pm b)^3$  یعنی فقط حاصل توان دوم و سوم دوجمله‌ای‌های  $(a \pm b)$  را یادآوری کردیم؛ در تکمیل مطالبی که در این باره گفته شد، متذکر می‌شویم برای اینکه دوجمله‌ای‌های  $(a+b)$  یا  $(a-b)$  را به توانی بیش از توان سوم برسانیم، قاعده و دستور دیگری به نام دستور دوجمله‌ای نیوتون در کار است که ذیلاً ضمن يك مثال (و بدون اثبات) به ذکر آن می‌پردازیم:

مثال: فرض می‌کنیم بخواهیم حاصل توان هفتم  $(a+b)$  یعنی حاصل  $(a+b)^7$  را تعیین کنیم:

بدلاً متذکر می‌شویم که اگر دوجمله‌ای  $(a+b)$  را بطور کلی به توان  $n$  ( $n$  عددی است صحیح و مثبت) برسانیم، حاصل  $(a+b)^n$  شامل مجموع جبری  $(n+1)$  جمله خواهد بود؛ مثلاً در اینجا که مقصود، تعیین حاصل  $(a+b)^7$  است، حاصل عمل شامل مجموع جبری هشت  $(7+1=8)$  جمله خواهد بود که هریک از آنها را متدرجاً طبق قاعده زیر تعیین می‌کنیم:

الف - در دوجمله‌ای  $(a+b)$ ، جمله اول یعنی  $a$  را به توان هفت و جمله دوم یعنی  $b$  را به توان صفر می‌رسانیم و حاصلها را در هم ضرب می‌کنیم، نتیجه به این صورت خواهد بود:  $a^7b^0$ ! این يك جمله‌ای،

اولین جمله از هشت جمله مطلوب است؛ بدیهی است چون  $b^0$  برابر واحد است، خلاصه جمله  $a^7b^0$  می‌شود  $a^7$  ( $a^7 \times 1 = a^7$ ).

ب - ضرب جمله دوم از حاصل مطلوب طبق قاعده زیر بدست می‌آید:

در جمله اول  $(a^7b^0)$ ، حاصل ضرب ضرب این جمله و نماینده  $a^6(1 \times 7)$ ، را بر عددی که به اندازة يك واحد از نماینده  $b$  بیشتر باشد،  $(0+1)$ ، تقسیم می‌کنیم؛ طبق این قاعده ضرب جمله دوم چنین می‌شود:

$$\frac{1 \times 7}{0+1} = \frac{7}{1} = 7$$

برای تعیین حروف جمله دوم، کافی است در جمله اول،  $a^7b^0$ ، يك واحد از نماینده  $a$  کاسته و يك واحد به نماینده  $b$  اضافه کنیم؛ و بنا بر این قاعده، حروف جمله دوم چنین خواهند بود:

$$a^6b^1 \text{ یعنی } a^6b$$

در نتیجه با تعیین ضرب و حروف جمله دوم، خود این جمله، یعنی جمله دوم از هشت جمله مطلوب، برابر  $7a^6b$  می‌شود.

ج - ضرب جمله سوم به ترتیب زیر بدست می‌آید:

در جمله دوم  $(7a^6b)$ ، حاصل ضرب ضرب این جمله و نماینده  $a^5(6 \times 7)$ ، را بر عددی که يك واحد از نماینده  $b$  بیشتر باشد،  $(1+1)$ ، تقسیم می‌کنیم. و چون طبق این قاعده عمل کنیم چنین خواهیم داشت:

$$\frac{7 \times 6}{1+1} = \frac{42}{2} = 21$$

پس ضرب جمله سوم می‌شود:  $21$ .

برای تعیین حروف جمله سوم، کفایت می کند که در جمله دوم،  
 $(\gamma a^2 b)$ ، یک واحد از نماینده  $a$  کاسته و یک واحد بر نماینده  $b$  بیفزاییم  
 و طبق این قاعده، حروف جمله سوم می شود:  $a^6 b^2$  یعنی  $a^{6-1} b^{1+1}$ .  
 پس از آنکه ضریب و حروف جمله سوم معین شدند، خود جمله  
 سوم از هشت جمله مطلوب، چنین می شود:  $21 a^5 b^2$ .

د - بطور کلی برای اینکه از روی یک جمله معلوم، جمله بعدی  
 را بنویسیم، باید ابتدا ضریب و سپس حروف جمله بعدی را تعیین کنیم  
 و برای انجام دادن این مقصود، قاعده بر این است که اولاً در جمله معلوم  
 حاصل ضرب ضریب این جمله و نماینده  $a$  را بر عددی که به اندازه یک  
 واحد از نماینده  $b$  در همین جمله بیشتر باشد تقسیم کنیم تا ضریب جمله  
 بعدی بدست آید. و ثانیاً باید در جمله معلوم، یک واحد از نماینده  $a$  بکاهیم  
 و یک واحد به نماینده  $b$  بیفزاییم که حروف جمله بعدی عاید شود و با  
 تعیین ضریب و حروف جمله بعدی، نوشتن آن اشکالی نخواهد داشت.  
 چون عمل را طبق همین قاعده و روش متدرجاً ادامه دهیم و پیش رویم،  
 بالاخره به جمله  $(1 \times a^0 \times b^7)$  یعنی  $b^7$  خواهیم رسید که در آن نماینده  
 $a$  برابر صفر و نماینده  $b$  برابر هفت می شود. در موقعی که ضمن عملیات  
 مذکور به جمله  $b^7$  برسیم، بسط  $(a+b)^7$  تمام شده است.  
 با بکار بردن قاعده بالا بسط  $(a+b)^7$  به این صورت خواهد بود:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

یادآوری بعضی خواص از بسط  $(a+b)^n$ :

I - با توجه به تذکری که در مقدمه مثال اخیر داده شد، بسط  
 استنباط می شود که در عبارت  $(a+b)^n$ ، بر حسب آنکه عدد  $n$  زوج یا  
 فرد باشد، عددهای جمله های که از بسط  $(a+b)^n$  بدست می آیند، بترتیب  
 فرد یا زوج خواهند بود.

II - در بسط  $(a+b)^n$ ، ضرایب جمله های متساوی البعد از  
 طرفین، متساویند.

III - در بسط  $(a-b)^n$  یعنی  $[a+(-b)]^n$ ، که طبق همان  
 قاعده مذکور در مثال اخیر بسط داده می شود، اولین جمله مسبوق به علامت  
 $(+)$  و جمله های بعدی بترتیب یک در میان مسبوق به علامت  $(-)$  و  
 $(+)$  خواهند بود؛ مثلاً بسط عبارت  $(x-y)^5$  چنین می شود:

$$\begin{aligned} (x-y)^5 &= [x+(-y)]^5 = x^5(-y)^0 + 5x^4(-y)^1 \\ &\quad + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3 + 5x(-y)^4 \\ &\quad + 1 \times x^0(-y)^5 \\ &= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 \end{aligned}$$

تصريح - اگر بخواهیم عبارت  $(2x-3y)^4$  را طبق دستور دو  
 جمله ای نیوتن بسط دهیم، ابتدا فرض می کنیم:  $2x = a$  و  $3y = b$ ؛  
 در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

اینک به جای  $a$  و  $b$  مقادیرشان را بترتیب  $2x$  و  $3y$  قرار می دهیم:

مثال :

$$\begin{aligned} 18x^3 + 24x^2 + 36 &= 6(3x^3 + 4x^2 + 6) \\ 4x^2y^3 + 12x^3y^2 &= 4x^2y^2(x + 3y) \\ 4a^2(x+y) + 8a(x+y) &= 4a(x+y)(a+2) \\ (a-b)^2 + 2(a-b) &= (a-b)(a-b+2) \end{aligned}$$

تبصره ۱ - اگر ضرایب جمله‌های يك عبارت جبری متحدالعلامه

باشند ، فاکتور ، هم علامت با آنهاست و چنانچه ضرایب جمله‌های عبارت جبری مختلفالعلامه باشند ، می توانیم بر حسب ضرورت علامت فاکتور را (+) یا (-) اختیار کنیم :

مثال ۱ :

$$\begin{aligned} 6ax^2(x-1) + 12a^2x(x-1)^2 &= 6ax(x-1)[x+2a(x-1)] \\ &= 6ax(x-1)(x+2ax-2a) \end{aligned}$$

مثال ۲ :

$$x^2 - x^3 - x = -x(-x^2 + x + 1)$$

مثال ۳ :

$$\begin{aligned} 9x^4y^2 - 12x^2y^3 &= +3x^2y^2(3x-4y) \\ 9x^3y^2 - 12x^2y^3 &= -3x^2y^2(-3x+4y) \\ &= -3x^2y^2(4y-3x) \end{aligned}$$

تبصره ۴ - علاوه بر مطالبی که ضمن تبصره ۱ ( شماره ۲۵ ) یاد

آوردی شد ، در يك عبارت جبری ، ممکن است به مناسبتی بر حسب موقعیت و مقام ، ضریب یا حروف یا پرانتز دلخواهی را عامل مشترك (فاکتور) قرار دهیم؛ مثلاً در عبارت زیر :

$$6a^2x^2 - 3ax^3 + 21a^3x^5$$

بر حسب آنکه جمله  $3ax^2$  یا  $6a^2x^2$  یا  $x^2$  یا  $ab$  یا  $(a-b)$

$$\begin{aligned} (2x-3y)^2 &= (2x)^2 - 4(2x)(3y) + 6(2x)(3y)^2 \\ &\quad - 4 \times 2x(3y)^2 + (3y)^2 \\ &= 4x^2 - 12x^2y + 12x^2y^2 - 12x^2y^2 + 9y^2 \end{aligned}$$

## تجزیه عبارت جبری به حاصل ضرب عوامل

۴۴ - تجزیه يك عبارت جبری ، یعنی تبدیل آن به حاصل ضرب

چند عامل بقسمی که هیچیک از آن عوامل تجزیه پذیر نباشند .

در تجزیه از فاکتورگیری و اتحاد استفاده می کنند .

۴۵ - فاکتورگیری - فاکتور یا عامل مشترك يك عبارت جبری

را به طریق زیر تعیین می کنند :

الف - بین ضرایب جمله‌های مختلف عبارت جبری ، بزرگترین مقسوم علیه مشترك می گیرند ؛ حاصل این عمل ، فاکتور ضرایب خواهد بود .

ب - بین حروف و پرانتزهای مشترك در تمام جمله‌های عبارت جبری ، آنهایی را که توانشان کمتر است اختیار می کنند؛ حاصل ضرب این قبیل حروف و پرانتزها ، فاکتور حروف و پرانتزهای عبارت جبری خواهد بود .

ج - با انجام دادن دو عمل قسمتهای (الف و ب) ، فاکتور عبارت جبری ، حاصل ضرب فاکتور ضرایب در فاکتور حروف و پرانتزهای آن خواهد بود .

مثال ۲ :

$$\begin{aligned} 2ax^2 - bx^2 + 2ax - bx - 2a + b &= \\ 2ax^2 + 2ax - 2a - bx^2 - bx + b &= \\ 2a(x^2 + x - 1) - b(x^2 + x - 1) &= \\ (x^2 + x - 1)(2a - b) \end{aligned}$$

۲۷ - تجزیه به کمک اتحادها - می دانیم که :

$$(E) \quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

با توجه به تساوی (E) عبارتهایی به شکل  $a^2 \pm 2ab + b^2$  را به ترتیب به صورت  $(a \pm b)^2$  یعنی  $(a+b)(a+b)$  یا  $(a-b)(a-b)$  می توان تجزیه کرد .

۲۸ - از مطالب بالا نتیجه می شود هر سه جمله ای که دو جمله آن مسوق به علامت (+) و جذر کامل داشته و جمله سوم مساوی دو برابر حاصل ضرب آن دو جذر باشد، تجزیه پذیر است .

تبصره ۱ - درجند هر جمله، از ضرب آن جمله جذر می گیریم و توانهای حروفش را نصف می کنیم .

تبصره ۲ - اگر دو جمله از سه جمله ای مذکور در شماره ۲۸ مسوق به علامت (-) بوده و صرف نظر از علامت (-) جذر کامل داشته باشند، ابتدا در سه جمله ای از (۱-) فاکتور می گیریم، سپس عبارت داخل پرانتز را طبق دستور بالا تجزیه می کنیم .

مثال :

الف :

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

ب :

$$25a^2 - 30ab + 9b^2 = (5a-3b)^2$$

ج :

$$2x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2$$

را عامل مشترك قرار دهیم، بترتیب چنین خواهیم داشت:

$$6a^2x^2 - 2ax^2 + 21a^2x^5 = 2ax^2(2a - x + 7ax^3)$$

$$6a^2x^2 - 2ax^2 + 21a^2x^5 = -2ax^2(-2a + x - 7ax^3) \quad \text{و}$$

$$6a^2x^2 - 2ax^2 + 21a^2x^5 = \quad \text{و}$$

$$-\frac{r}{\delta}(-10a^2x^2 + 5ax^5 - 25a^2x^5)$$

$$6a^2x^2 - 2ax^2 + 21a^2x^5 = x^2 \left( \frac{6a^2}{x} - 2a + 21a^2x \right) \quad \text{و}$$

$$6a^2x^2 - 2ax^2 + 21a^2x^5 = ab \left( \frac{6ax^2}{b} - \frac{2x^2}{b} + \frac{21ax^5}{b} \right) \quad \text{و}$$

$$6a^2x^2 - 2ax^2 + 21a^2x^5 = \quad \text{و}$$

$$(a-b) \left( \frac{6a^2x^2}{a-b} - \frac{2ax^2}{a-b} + \frac{21a^2x^5}{a-b} \right)$$

۲۶ - تجزیه از طریق دسته بندی - چنانچه تمام جمله های يك

عبارت جبری، بزرگترین مقسوم علیه مشترك یعنی فاکتور مشتركی نداشته باشند، می توان جمله های آن عبارت را دسته بندی کرد، بطوری که هر دسته فاکتوری جداگانه نداشته باشد؛ بکار بردن این طریقه، به منظور تجزیه يك عبارت جبری، وقتی مفید است که عبارتهای حاصل از فاکتورگیری در هر دسته، خود دارای فاکتور مشتركی باشند .

مثال ۱ :

$$\begin{aligned} 6ax + 9ay - 4bx - 6by &= 2a(2x + 3y) - 2b(2x + 3y) \\ &= (2x + 3y)(2a - 2b) \end{aligned}$$

$$2x - x^2 - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2 \quad : د$$

$$\begin{aligned} 18xy - x^2 - 18y^2 &= -(18y^2 - 18xy + x^2) \\ &= -(9y - x)^2 \quad : ه \end{aligned}$$

۴۹ - تجزیه به کمک اتحاد مزدوج - می‌دانیم :

$$(E') \quad a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$$

یعنی عبارت  $a^2 - b^2$  را می‌توان به صورت  $(a+b)(a-b)$

تجزیه کرد؛ باین بیان دیگر، رابطه  $(E')$  چنین معنی می‌دهد :

تفاضل دوم جزو کامل مساوی است با :

( جذر دوم - جذر اولی ) ( جذر دومی + جذر اولی )

مثال :

$$a^2 - 4 = (x+2)(x-2) \quad \text{الف :}$$

$$9a^2 - 9b^2 = (3a+3b)(3a-3b) \quad \text{ب :}$$

$$-x^2 + 1 = 1^2 - (x^2)^2 = (1+x^2)(1-x^2) \quad \text{ج :}$$

$$= (1+x^2)(1^2 - x^2) = (1+x^2)(1+x)(1-x)$$

$$16 - x^2 = 4^2 - (x^2)^2 = (4+x^2)(4-x^2) \quad \text{د :}$$

$$= (4+x^2)(2^2 - x^2) = (4+x^2)(2+x)(2-x)$$

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2+1)(x^2-1) \quad \text{ه :}$$

$$= (x^2+1)[(x^2)^2 - 1^2] = (x^2+1)(x^2+1)(x^2-1)$$

$$= (x^2+1)(x^2+1)(x^2-1^2)$$

$$= (x^2+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$(4x+y)^2 - 1 = (4x+y)^2 - 1^2 \quad \text{و :}$$

$$= [(4x+y)+1][(4x+y)-1]$$

$$= (4x+y+1)(4x+y-1)$$

$$\begin{aligned} & (2x-3)^2 - (2x+1)^2 \quad : ز \\ & = [(2x-3) + (2x+1)][(2x-3) - (2x+1)] \\ & = (2x-3+2x+1)(2x-3-2x-1) \\ & = (4x-2)(-4) = 2(2x-1)[-2(x+2)] \\ & = -4(2x-1)(x+2) \end{aligned}$$

۴۰ - تجزیه به کمک اتحاد :

$$(E'') \quad x^2 + (a+b)x + ab \equiv (x+a)(x+b)$$

با اندک دقت و تعمق در ساختمان و ترکیب جمله‌ها و عوامل طرفین

تساوی  $(E'')$ ، نکات زیر سهولت استنباط می‌شود :

الف - در طرف اول رابطه  $(E'')$ ، ضریب جمله اول، یعنی ضریب

$x^2$  برابر با حاصل‌ضرب دو جمله‌ای می‌شود:  $x$ ؛ و این جندهمان جمله

مشترک بین دو عامل ضرب  $(x+a)$  و  $(x+b)$  است که در طرف دوم

تساوی  $(E'')$  وجود دارند .

ب - در طرف اول رابطه  $(E'')$  ضریب جمله دوم، یعنی ضریب

جمله  $x$  برابر  $(a+b)$  می‌شود:  $(a+b)$ ؛ و این ضریب مجموع جبری  $a$

و  $b$  یعنی مجموع جبری دو جمله غیر مشترک بین دو عامل ضرب

$(x+a)$  و  $(x+b)$  می‌باشد که در طرف دوم تساوی  $(E'')$  وجود دارند .

بطور خلاصه: ضریب جمله دوم طرف اول تساوی  $(E'')$  مساوی

است با مجموع جبری دو جمله غیر مشترک بین عوامل ضرب  $(x+a)$  و

$(x+b)$  مندرج در طرف دوم رابطه  $(E'')$  .

ج - جمله سوم طرف اول رابطه  $(E'')$  یعنی  $ab$ ، حاصل ضرب

دو عدد جبری  $a$  و  $b$  است که این دو عدد همان جمله‌های غیرمشتربین دو عامل ضرب  $(x+a)$  و  $(x+b)$  ، موجود در طرف دوم رابطه  $(E)$  ، می‌باشند .

باتوجه به مطالب مذکور در قسمتهای (الف و ب و ج) و تطبیق آنها با اجزای مختلف تساوی  $(E'')$  واضح می‌شود :

هر سه جمله‌ای درجه دوم از حرفی مانند  $x$  ، که در آن ضرب جمله درجه دوم یعنی ضرب  $x^2$  برابر واحد باشد ، در صورتی تجزیه پذیر است که پس از مرتب کردن آن سه جمله‌ای نسبت به قوای نزولی  $x$  ، تعیین دو عدد جبری با دو شرط زیر میسر باشد :

I - مجموع آن دو عدد جبری برابر با ضرب دومین جمله از سه جمله‌ای مفروض (یعنی برابر با ضرب  $x$  ) باشد .

II - حاصل ضرب آن دو عدد جبری برابر با سومین جمله از سه جمله‌ای مفروض باشد .

**بطور خلاصه :** هر وقت در سه جمله‌ای درجه دوم مفروضی که نسبت به قوای نزولی  $x$  مرتب و ضرب  $x^2$  در آن برابر واحد باشد ، پیدا کردن دو عدد جبری مانند  $a$  و  $b$  با دو شرط ( I ) و ( II ) میسر شود . سه جمله‌ای مفروض با استفاده از رابطه  $(E'')$  به دو عامل ضرب  $(x+a)$  و  $(x+b)$  به صورت :  $(x+a)(x+b)$  تجزیه خواهد شد .

**تبصره -** چنانچه در یک سه جمله‌ای درجه دوم از حرف  $x$  ، ضرب  $x^2$  عددی غیر از واحد مانند عدد جبری  $c$  باشد ، ابتدا در سه جمله‌ای مورد نظر عدد جبری  $c$  را عامل مشترك قرار می‌دهند و بعد از آن ،

هبارت داخل پرانتز را در صورت امکان طبق قاعده بالاتجزیه می‌کنند .

**مثال ۱ -** عبارت :  $16x^2 + 48x + 48$  را تجزیه کنید .

در سه جمله‌ای مفروض که نسبت به قوای نزولی  $x$  مرتب است ، ضرب  $x^2$  برابر واحد است ؛ پس اگر سه جمله‌ای مفروض به دو عامل ضرب تجزیه پذیر باشد ، جذر  $x^2$  یعنی  $x$  جمله مشترك دو عامل ضرب مطلوب خواهد بود .

حال بر طبق مطالبی که ضمن شماره ۳۰ گفته شد ، باید دو عدد جبری مانند  $a$  و  $b$  بقسمی تعیین کنیم که اولاً مجموع آنها  $(a+b)$  ، برابر با ضرب دومین جمله از سه جمله‌ای مفروض یعنی برابر  $(-16)$  و ثانیاً حاصل ضرب آنها  $ab$  ، برابر سومین جمله از سه جمله‌ای مفروض یعنی برابر  $(+48)$  باشد ؛ با تجسس و آزمایش روی اعداد مناسب با این مقصود ، دو عدد  $(-12)$  و  $(-4)$  بدست می‌آیند و طبق رابطه  $(E'')$  چنین خواهیم داشت :

$$x^2 - 16x + 48 = (x-4)(x-12)$$

**مثال ۲ -** عبارت :  $12x^2 - 8x - 8$  را تجزیه کنید .

چون مانند مثال ۱ استدلال کنیم ، معلوم می‌شود که برای تجزیه سه جمله‌ای مفروض باید دو عدد جبری  $a$  و  $b$  را بقسمی تعیین کنیم که مجموعشان  $(-8)$  و حاصل ضربشان  $(-12)$  باشد .

در اینجا ملاحظه می‌کنیم که اولاً حاصل ضرب دو عدد مطلوب یعنی  $(-12)$  منفی است ؛ پس دو عدد مطلوب  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه خواهند بود ؛ ثانیاً چون مجموع جبری دو عدد مختلف‌العلامه باید



(۸-) باشد، از اینجا استنباط می‌کنیم از دو عدد مطلوب، آن‌که قدر مطلقش بیشتر است منفی است؛ اکنون با توجه به این نکات، حاصل- ضرب دو عدد مطلوب یعنی  $(-۱۲۸)$  را تجزیه می‌کنیم، صورت‌های مختلف زیر حاصل می‌شود:

$$(۸ و -۱۶)، (۳ و -۳۲)، (۲ و -۶۴)، (۱ و -۱۲۸)$$

آزمایش نشان می‌دهد که بین چهار جفت اعداد اخیر، دو عددی که مجموع جبری آنها  $(-۸)$  باشد عبارتند از:  $(+۸ و -۱۶)$ ؛ از اینجا اعداد مطلوب  $a$  و  $b$   $(+۸ و -۱۶)$  بدست می‌آیند و با توجه به رابطه  $(E'')$ ، سه جمله‌ای مفروض به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$x^2 - 8x - 128 = (x + 8)(x - 16)$$

مثال ۳- عبارت:  $2x^2 + 7x + 3$  را تجزیه کنید.

چون در سه جمله‌ای مفروض، ضریب  $x^2$  برابر واحد نیست، ابتدا ضریب  $x^2$  یعنی عدد ۲ را عامل مشترك قرار داده و سه جمله‌ای مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(E_1) \quad 2x^2 + 7x + 3 = 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right)$$

حال باید سه جمله‌ای:  $x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$  را به صورت دو عامل ضرب در آوریم و برای این منظور، مانند مثال‌های ۱ و ۲ باید دو عدد جبری  $a$  و  $b$  را بقسمی تعیین کنیم که مجموعشان  $(\frac{7}{2})$  و حاصل-

ضربشان  $(\frac{3}{2})$  باشد.

در اینجا به ملاحظه اینکه  $(\frac{7}{2} و \frac{3}{2})$ ، مجموع و حاصل ضرب اعداد مطلوب  $a$  و  $b$  کسری هستند، برای سهولت عمل و به منظور اینکه با اعداد کسری سر و کار نداشته باشیم، ابتدا دو برابر اعداد  $a$  و  $b$  را (در صورتی که وجود داشته باشند) پیدا کرده سپس حاصلها را نصف می‌کنیم تا خود اعداد  $a$  و  $b$  بدست آیند.

ضمن انجام این عمل باید متذکر بود که هرگاه اعداد مجهول  $a$  و  $b$  را دو برابر کنیم، مجموعشان  $(\frac{7}{2})$  نیز دو برابر می‌شود اما حاصل- ضرب آنها یعنی  $(\frac{3}{2})$  چهار برابر خواهد شد و با این تدبیر، تعیین اعداد  $a$  و  $b$  که مجموع و حاصل ضربشان کسری است، به تعیین دو عدد  $a'$  و  $b'$  که مجموعشان عدد صحیح ۷ و حاصل ضربشان عدد صحیح ۶ باشد منجر می‌شود.

برای بدست آوردن اعداد  $a'$  و  $b'$  نیز ابتدا توجه می‌کنیم که اولاً چون حاصل ضرب این دو عدد (یعنی ۶) مثبت است، اعداد  $a'$  و  $b'$  متحدالعلامه‌اند، ثانیاً چون مجموع جبری دو عدد متحدالعلامه (که در این مثال عدد ۷+ است) با خود آن اعداد متحدالعلامه است، دو عدد  $a'$  و  $b'$  هر دو مثبت خواهند بود.

اکنون، با توجه به مطالب بالا، حاصل ضرب دو عدد  $a'$  و  $b'$  یعنی

۶ را تجزیه می‌کنیم، دو صورت مختلف زیر حاصل می‌شود:

$$(3+2+), (6+1+)$$

با اندک دقت در دو جفت اعداد اخیر، واضح می‌شود دو عددی که مجموعشان ۷ باشد، اعداد (۶ و ۱) هستند.

بنابراین اعداد  $a'$  و  $b'$  برابر (۶ و ۱) بوده و اعداد مطلوب  $a$  و  $b$ ، که باید نصف  $a'$  و  $b'$  باشند، برابر (۳ و  $\frac{1}{2}$ ) خواهند بود.

حال با استفاده از تساوی ( $E''$  شماره ۳۰) و با توجه به رابطه ( $E_1$  همین مثال)، سه جمله‌ای مفروض به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 3 &= 2(x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}) \\ &= 2(x + \frac{1}{2})(x + 3) \\ &= (2x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

۳۱ - تجزیه مجموع یا تفاضل دو مکعب - می‌دانیم:

$$\begin{aligned} (N) \quad a^2 + b^2 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ (N') \quad a^2 - b^2 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

یعنی عبارتهای:  $a^2 + b^2$  و  $a^2 - b^2$  را می‌توان بترتیب به

صورتتهای  $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$  و  $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$  تجزیه کرد؛ با بیان دیگر، تساویهای (N) و (N') چنین معنی می‌دهند:

مجموع یا تفاضل دو مکعب مساوی است با:

(مجنور کمب دومی + حاصل ضرب دو کمب - مجنور کمب اولی) (کمب دومی  $\pm$  کمب اولی)

تبصره - برای گرفتن کمب از يك جمله، کمب ضریب عددی آن جمله را می‌گیریم و توانهای حروف آن جمله را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

مثال:

$$\text{الف:} \quad x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

ب:

$$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

ج:

$$125x^3 + 64y^3 = (5x)^3 + (4y)^3 = (5x+4y)(25x^2 - 20x^2y + 16y^2)$$

د:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

می‌آورد اتمتعمال تجزیه

الف - ساده کردن کسرها:

۳۲ - برای ساده کردن يك کسر ابتدا، به شرط امکان،

صورت و مخرج کسر را به هرطریق که میسر باشد، به حاصل ضرب

عوامل تجزیه می‌کند ، سپس با حذف عوامل مشترك از صورت و مخرج ، کسر دیگری معادل کسر اصلی و ساده‌تر از آن بدست می‌آورند .

ذیلا به عنوان مثال ، طرز ساده کردن سه کسر مختلف را با انجام عملیات مناسب نشان می‌دهیم :

$$\frac{2ax+8ay}{2bx+2by} = \frac{2a(x+2y)}{2b(x+2y)} = \frac{2a}{2b} \quad \text{I}$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2} \quad \text{II}$$

$$\frac{a^2x^2+b^2x^2-2a^2x-2b^2x+2abx^2-2ab}{a^2x^2-b^2x^2+2a^2x-2b^2x+2a^2x-2b^2x} = \quad \text{III}$$

$$\frac{x^2(a^2+b^2+2ab)-2(a^2x+b^2x+2abx)}{a^2(x^2+2+2x)-b^2(x^2+2+2x)} =$$

$$\frac{x^2(a+b)^2-2(a+b)^2}{a^2(x+2)^2-b^2(x+2)^2} = \frac{(a+b)^2(x^2-2)}{(x+2)^2(a^2-b^2)} =$$

$$\frac{(a+b)^2(x+2)(x-2)}{(x+2)^2(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)(x-2)}{(a-b)(x+2)}$$

ب- تعیین مخرج مشترك بین چند کسر یا تحویل چند کسر به يك مخرج :

۳۳ - برای تعیین کوچکترین مخرج مشترك بین چند کسر ، پس از تبدیل آنها به کسرهای غیرممکن التحویل ، ابتدا در صورت امکان ، مخرجهای کسور غیر ممکن التحویل را به حاصل ضرب عوامل تجزیه می‌کنند ؛ بعد از انجام این عمل ، با مطالعه در مخرجهای

کسرها ، اولاً ضرایب مخرجهای کسرها را مشخص می‌کنند ؛ ثانیاً حروف یا پرانتزهایی را که به شکل عامل ضرب در تمام مخرجها وجود دارند ، و آنها را عوامل مشترك مخرجها می‌نامند ، تعیین می‌کنند ؛ ثالثاً حروف یا پرانتزهایی را که به شکل عامل ضرب در بعضی مخرجها موجود و بعضی مخرجها فاقد آنها هستند ، مشخص کرده این قبیل عاملها را عوامل نیمه مشترك می‌خوانند ؛ رابعاً اگر مخرجهای کسرها دارای عواملی غیر مشترك ، بصورت حرفی یا به صورت پرانتز ، نیز باشند ، آنها را هم معین می‌کنند .

وقتی که ضرایب و عوامل مشترك و نیمه مشترك و غیر مشترك مخرجها مشخص شدند ، کوچکترین مخرج مشترك کسرها را به ترتیب زیر تعیین می‌کنند :

I - کوچکترین مضرب مشترك ضرایب مخرجهای کسرها را می‌گیرند ، عددی که به این ترتیب حاصل می‌شود ، ضریب کوچکترین مخرج مشترك کسرها خواهد بود .

II - از عوامل مشترك و نیمه مشترك ، دو عاملی را که بین اشیاء خود ، توانی بیشتر از همه دارند اختیار می‌کنند ؛ حاصل ضرب عوامل که به این ترتیب اختیار شده‌اند ، کوچکترین مضرب مشترك بین عوامل مشترك و نیمه مشترك مخرجها خواهد بود .

III - حاصل ضرب عوامل غیر مشترك مخرجها را نیز، که کوچکترین مضرب مشترك همین عوامل خواهد بود، تعیین می کنند. همینکه عملیات بالا انجام شد :

حاصل ضرب نتایجی که از قسمتهای (I و II و III) بدست آمده اند، کوچکترین مخرج مشترك کسره های مورد نظر خواهد بود. مثال - بین کسره های زیر کوچکترین مخرج مشترك تعیین کنید:

$$\frac{1}{48a^3b} \text{ و } \frac{5}{72ab^2x} \text{ و } \frac{7}{120a^2x^2y}$$

بین اعداد ۷۲۰ و ۷۲ و ۴۸ کوچکترین مضرب مشترك ، ۷۲۰ است . بین حروف مشترك  $a$  ، کوچکترین مضرب مشترك  $a^2$  است . بین حروف نیمه مشترك  $b$  و  $x$  ، کوچکترین مضرب مشترك، بترتیب  $b^2$  و  $x^2$  است و  $y$  هم حرف غیر مشترك است ؛ پس کوچکترین مخرج مشترك کسره های بالا  $720a^2b^2x^2y$  می باشد .

ج - حل معادلات به کمک تجزیه :

۴۴ - می دانیم وقتی که حاصل ضرب چند عامل برابر صفر باشد، لااقل یکی از آن عوامل صفر خواهد بود .

با استفاده از این خاصیت ، چنانچه بتوان معادله ای را پس از نقل تمام جمله هایش به طرف اول تساوی ، به حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد ، چون در این وضع ، حاصل ضرب چند عامل صفر می شود، می توان هر يك از آن عاملها را جداگانه مساوی صفر قرار داد و جواب

(یا جوابهای) معادلات حاصل از تجزیه را، که همان جوابهای معادله اصلی هستند، بدست آورد .

مثال ۱- مطلوب است حل معادله:  $x^2 - 5x = -6$

حل :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

مثال ۲ - معادله:  $x^2 - 6x + 9 = 0$  را حل کنید .

حل :

$$(x-3)^2 = 0$$

$$(x-3)(x-3) = 0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

مثال ۳ - معادله:  $x^2 - 16x = 0$  را حل کنید .

حل :

$$x(x^2 - 16) = 0$$

$$(x-4)(x+4)x = 0$$

$$x-4=0$$

$$x=4$$

$$x+4=0$$

$$x=-4$$

$$x=0$$

$$x=0$$

### جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کسرها

**۳۵ - جمع و تفریق کسرها** - در جمع یا تفریق چند کسر، ابتدا هر يك از کسرها را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل می‌کنند، سپس چنانچه مخرجها متساوی باشند، جمع یا تفریق جبری را درباره صورتها انجام داده حاصل را صورت کسری قرار می‌دهند که مخرجش همان مخرج مشترك کسور اصلی باشد؛ کسری که به این ترتیب بدست می‌آید حاصل جمع یا حاصل تفریق کسره‌های مفروض خواهد بود.

هرگاه مخرجهای کسرهایی که می‌خواهیم جمع یا تفریق کنیم متساوی نباشند، ابتدا طبق قاعده‌ای که ضمن شماره ۳۳ گفته شد، کوچکترین مخرج مشترك کسرها را معین می‌کنیم و بعد از آن به جای کسور اصلی، کسرهایی متحدالمخرج و معادل با کسره‌های مفروض به ترتیب زیر تعیین می‌کنیم:

کوچکترین مخرج مشترك را بر مخرج هر يك از کسره‌ای مفروض تقسیم کرده خارج قسمت تقسیم را در صورت همان کسر ضرب می‌کنیم و حاصل این ضرب را صورت کسری قرار می‌دهیم که مخرجش همان کوچکترین مخرج مشترك باشد؛ هر يك از کسرهایی که طبق این قاعده بدست می‌آیند، با یکی از کسره‌های مفروض معادل بوده و درعین

حال همگی متحدالمخرجند.

بنابراین، با توجه به قاعده مذکور در مقدمه شماره ۳۵، کافی است به جای کسره‌های اصلی، کسور متحدالمخرج تعیین شده را اختیار کرده و عمل جمع یا تفریق را در باره آنها انجام دهیم.

**مثال ۱** - حاصل عبارت زیر را معین کنید:

$$\frac{a-1}{a+1} + \frac{2a}{a+1} - \frac{2a-3}{a+1}$$

**حل:**

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{a+1} + \frac{2a}{a+1} - \frac{2a-3}{a+1} &= \frac{a-1+2a-2a+3}{a+1} \\ &= \frac{2a+2}{a+1} = \frac{2(a+1)}{a+1} = 2 \end{aligned}$$

**مثال ۲** - حاصل عبارت زیر را معین کنید:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{x-1}{2x+2}$$

**حل:**

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} \\ &= \frac{2(x+1)^2 + 2 - (x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + 6x + 5}{2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x+5)}{2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x+5}{2(x-1)} \end{aligned}$$

۳۶ - ضرب کسرها - در ضرب چندکسر، حاصل ضرب صورت‌های عوامل ضرب را صورت يك کسر قرار می‌دهیم که مخرجش حاصل ضرب مخرج‌های عوامل ضرب باشد؛ کسری که به این ترتیب بدست می‌آید حاصل ضرب کسره‌ای مفروض خواهد بود.

واضح است که اگر در صورت و مخرج کسر حاصل ضرب، عوامل مشترکی وجود داشته باشد، با حذف عوامل مشترك، کسر حاصل ضرب را می‌توان ساده کرد.

مثال :

$$\frac{125a^2 - 27}{25a^2 - 9} \times \frac{5a + 3}{25a^2 - 30a + 9} = \frac{(125a^2 - 27)(5a + 3)}{(25a^2 - 9)(25a^2 - 30a + 9)} = \frac{(5a - 3)(25a^2 + 15a + 9)(5a + 3)}{(5a - 3)(5a + 3)(5a - 3)^2} = \frac{25a^2 + 15a + 9}{(5a - 3)^2}$$

۳۷ - تقسیم کسرها - خارج قسمت تقسیم دو کسر به این ترتیب بدست می‌آید که کسر مقسوم را در عکس کسر مقسوم علیه ضرب کرده حاصل را ساده کنیم.

مثال :

$$\frac{a^2 - b^2}{a} : \frac{a + b}{3ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{3ab}{a + b} = \frac{3ab(a - b)(a + b)}{a(a + b)} = 3b(a - b)$$

تقسیم يك چندجمله‌ای صحیح از  $x$  بريك دوجمله‌ایبه صورت  $x - a$ 

۳۸ - باتوجه به شماره ۱۱ و تبصره ذیل آن، می‌دانیم : چند

جمله‌ای‌هایی مانند :

$$5x^3 - 8x^2 + 3x^2 + 10x - 1$$

$$3 + 9x - 6x^2 + 5x^3 - 2x^4 + 8x^5 \quad \text{و}$$

را که شامل جمیع قوای نزولی یا صعودی از حرفی مانند  $x$  هستند، چند جمله‌ای کامل از حرف  $x$  می‌نامند؛ و چندجمله‌ای‌هایی مانند :

$$3x^4 - 2x^2 + 5x^2 - 1$$

$$7 + 3x^2 - 2x^4 + 2x^5 \quad \text{و}$$

که فاقد بعضی از قوای حرف  $x$  باشند، چندجمله‌ای ناقص از حرف  $x$  نامیده می‌شوند.

ضمناً هر کثیرالجملة ناقص را با افزودن جمله‌های مناسب که ضرایب آنها صفر باشد، می‌توان به صورت کثیرالجملة کامل درآورد. برای اختصار، کثیرالجملة‌هایی که شامل حرف  $x$  باشند، به علامت  $f(x)$  (اف  $x$ ) یا  $p(x)$  (پ  $x$ ) نمایش می‌دهند، مانند :

$$f(x) = x^2 - 3x^2 + 1$$

چنانچه در کثیرالجملة، به جای  $x$  عدد مشخص  $a$  را قرار دهیم، حاصل را  $f(a)$  یا  $p(a)$  می‌نامند؛ مثلاً مقدار کثیرالجملة اخیر، به

$$\text{ازای } x=2 \text{ چنین می‌شود: } f(2) = -3$$

هرگاه  $f(a) = 0$  شود، عدد  $a$  ریشه کثیرالجملة نامیده می‌شود.

۳۹ - قضیه - باقیمانده تقسیم هر کثیرالجملة صحیح از  $x$ 

بر دوجمله‌ای  $x - a$ ، مساوی است با مقدار آن کثیرالجملة به ازای  $x = a$ .

**اثبات -** در حساب خوانده ایم که در عمل تقسیم، هرگاه به حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت، باقیمانده تقسیم را اضافه کنیم، حاصل مساوی مقسوم می شود؛ با توجه به این خاصیت چنانچه کثیر الجمله مقسوم را  $f(x)$  و خارج قسمت تقسیم  $f(x)$  بر  $x-a$  را  $Q(x)$  و باقیمانده این تقسیم را  $R$  فرض کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$(I) \quad f(x) \equiv (x-a) \cdot Q(x) + R$$

واضح است چون مقسوم علیه از درجه اول است،  $R$  مقداری ثابت و مستقل از  $x$  می باشد و چون رابطه (I) به ازای جميع مقادیر  $x$  محقق است، باید حاصل دوطرف رابطه (I) به ازای  $x=a$  هم متساوی باشد، یعنی:

$$f(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R$$

$$f(a) = 0 \times Q(a) + R$$

یا:

و پس از اختصار:

$$(II) \quad f(a) = R$$

و برقراری رابطه (II)، صحت حکم قضیه را محقق می سازد.

**نتیجه ۱ -** شرط لازم و کافی برای آنکه کثیر الجمله صحیحی از  $x$  بر  $(x-a)$  قابل قسمت باشد، این است که به ازای  $x=a$ ، حاصل کثیر الجمله صفر شود، یعنی داشته باشیم:

$$R = f(a) = 0$$

**مثال -** باقیمانده تقسیم کثیر الجمله:  $5x^4 - 3x^2 + 2x - 4$  را

بر  $(x-2)$  پیدا کنید.

**حل:**

$$R = f(2) = 5 \times 2^4 - 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 4$$

و پس از اختصار:

$$R = f(2) = 68$$

**نتیجه ۲ -** شرط لازم و کافی برای آنکه کثیر الجمله صحیحی از  $x$  بر  $x+a$  قابل قسمت باشد، این است که به ازای  $x=-a$ ، حاصل کثیر الجمله صفر شود. در حقیقت می توان مقسوم علیه را به صورت:  $x - (-a)$  نوشت و طبق قضیه قبل، باقیمانده را حساب کرد.

**مثال -** باقیمانده تقسیم کثیر الجمله:  $5x^4 - 3x^2 + 2x - 4$  را بر  $x+2$  بدست آورید.

**حل:**

$$R = f(-2) = 5(-2)^4 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 4$$

$$R = f(-2) = 60$$

**۴۰ - قاعده نوشتن خارج قسمت تقسیم يك کثیر الجمله کامل**

از  $x-a$  بر  $x$ .

بدو یاد آور می شویم که اولاً  $a$  ریشه معادله:  $x-a=0$  یعنی ریشه مقسوم علیه است؛ ثانیاً هر کثیر الجمله کامل از  $x$  که نسبت به حرف  $x$  از درجه  $n$  باشد، شامل  $(n+1)$  جمله است و اگر آن را بر دو جمله ای درجه اولی مانند:  $x-a$  تقسیم کنیم، خارج قسمت این تقسیم، کثیر الجمله کاملی از  $x$  و درجه آن نسبت به حرف  $x$  برابر  $(n-1)$  بوده و در نتیجه شامل  $n$  جمله خواهد بود.

مثلاً اگر بخواهیم کثیرالجزءه کامل :

$$A_0x^r + A_1x^{r-1} + A_2x^{r-2} + \dots + A_r$$

را که نسبت به حرف  $x$  از درجه سوم و شامل چهار جمله است ، بر دو جمله ای  $x - a$  تقسیم کنیم ، قبل از انجام عمل تقسیم ، پیش بینی می کنیم که خارج قسمت این تقسیم ، نسبت به حرف  $x$  از درجه دوم و شامل سه جمله خواهد بود .

حال به عنوان نمونه ، عمل همین تقسیم را به صورت زیر انجام

می دهیم :

$A_0x^r + A_1x^{r-1} + A_2x^{r-2} + \dots + A_r$	$x - a$
$- A_0x^r + A_0ax^{r-1}$	$A_0x^{r-1} +$
$(A_1a + A_0)x^{r-1} + A_2x^{r-2} + \dots + A_r$	$(A_1a + A_0)x +$
$-(A_1a + A_0)x^{r-1} + (A_2a^2 + A_1a)a x^{r-2} + \dots + A_r$	$(A_2a^2 + A_1a + A_0)$
$(A_2a^2 + A_1a + A_0)x + A_r$	
$-(A_2a^2 + A_1a + A_0)x + (A_0a^3 + A_1a^2 + A_2a)a$	
$A_0a^3 + A_1a^2 + A_2a + A_r$	

با اندک دقت در عبارت خارج قسمت ، واضح می شود که ضرایب جمله های مختلف خارج قسمت را ، بدون انجام عمل تقسیم ، طبق این قاعده می توان بدست آورد :

قاعده :

ضریب هر جمله از خارج قسمت بدست می آید اگر ، ضریب جمله قبلی از خارج قسمت را در  $a$  (ریشه مقسوم علیه) ضرب کرده و به حاصل ضرب ، ضریب «جمله همدریف همان جمله از مقسوم» را بیفزاییم.

مثلاً :  $(A_2a + A_1)$  ، ضریب جمله دوم از خارج قسمت ، به این ترتیب حاصل می شود که  $A_0$  ، ضریب جمله اول خارج قسمت را در  $a$  ضرب کرده و حاصل ضرب  $A_0a$  را با عدد  $A_1$  یعنی ضریب جمله دوم مقسوم جمع کنیم .

ضمناً باقیمانده تقسیم مذکور یعنی  $A_0a^3 + A_1a^2 + A_2a + A_r$  عیناً همان عبارت مقسوم است که در آن ، حرف  $a$  جانشین حرف  $x$  شده است .

مثال - بدون انجام عمل تقسیم ، خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را معین کنید :

$$(x^5 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 30) : (x - 2)$$

حل :

$$\text{ابتدا } R, \text{ باقیمانده تقسیم، را حساب می کنیم :}$$

$$R = f(2) = 2^5 - 4 \times 2^4 + 2^3 - 2 \times 2^2 + 2 + 30 = 0$$

پس باقیمانده تقسیم صفر است .

برای تعیین خارج قسمت ، بدو ملاحظه می کنیم که جمله اول آن :

$$\frac{x^5}{x} = x^4 \text{ به سبب بدست می آید . برای نوشتن ضریب جمله دوم،}$$



باید ضرب جمله اول یعنی ضرب  $x^4$  را که برابر واحد است، در عدد  $a$ ، (ریشه مقسوم علیه)، که در این مثال برابر ۲ است ضرب کنیم و حاصل ضرب  $1 \times 2$  یعنی ۲ را با ضرب جمله دوم مقسوم یعنی  $(-4)$  جمع کنیم؛ نتیجه این عمل که  $(-2)$  می شود، ضرب جمله دوم خارج قسمت است؛ پس جمله دوم خارج قسمت،  $-2x^2$  است.

چون طبق همین قاعده، ضرب جمله دوم یعنی  $(-2)$  را در عدد ۲، ریشه مقسوم علیه، ضرب کرده و حاصل را با ۱+، ضرب  $(+x^2)$  جمله سوم مقسوم، جمع کنیم، ضرب جمله سوم خارج قسمت چنین می شود:

$$2(-2)+1=-3$$

پس جمله سوم خارج قسمت،  $-3x^2$  است. اگر عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم مقدار  $Q(x)$ ، خارج - قسمت مطلوب، به صورت زیر بدست می آید:

$$Q(x) = x^4 - 2x^2 - 3x^2 - 8x - 15$$

تبصره - چنانچه کثیر الجمله مقسوم کامل نباشد، همان طور که ضمن شماره ۳۸ نیز متذکر شدیم، می توان با افزودن جمله هایی که ضریبهای آنها صفر باشد، کثیر الجمله را کامل کرد.

مثال - خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را بدون انجام عمل تقسیم معین کنید:

$$(x+3) : (2x^4 - 3x^2 + 5)$$

حل:

$$(x+3) : (2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 5) : (140)$$

$$R = f(-3) = 2(-3)^4 - 3(-3)^2 + 5 = 140$$

باقیمانده تقسیم، با مقسوم اولیه یا با مقسومی که کامل شده، می شود  $R = 140$ .

جمله اول خارج قسمت  $2x^4$  است. جمله دوم خواهد شد  $-6x^2$ ، زیرا:

$$(-3) + (2) + 0 = -6$$

جمله سوم می شود  $15x$  زیرا:

$$(-3)(-6) + (-3) = +15$$

به همین ترتیب جمله آخر خارج قسمت، برابر  $(-45)$  می شود و  $Q(x)$  خارج قسمت کامل، به صورت زیر تعیین می شود:

$$Q(x) = 2x^4 - 6x^2 + 15x - 45$$

۴۹ - خارج قسمت و باقیمانده  $\frac{x^m - a^m}{x - a}$  را بدون انجام عمل تقسیم تعیین کنید:

$$R = f(a) = a^m - a^m = 0$$

$$Q(x) = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

۴۲ - خارج قسمت و باقیمانده  $\frac{x^m + a^m}{x - a}$  را بدون انجام عمل تقسیم معین کنید:

$$R = f(a) = a^m + a^m = 2a^m$$

$$Q(x) = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1}$$

۴۳- خارج قسمت و باقیمانده  $\frac{x^m - a^m}{x + a}$  را بدون انجام عمل تقسیم پیدا کنید :

$$R = f(-a) = (-a)^m - a^m$$

در صورتی که  $m$  زوج باشد :  $R = 0$  .

در صورتی که  $m$  فرد باشد :  $R = -2a^m$  .

و مقدار  $Q(x)$  ، بر حسب آنکه  $m$  زوج یا فرد باشد، چنین است:

$$Q(x) = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots \pm a^{m-2}x \mp a^{m-1}$$

۴۴- خارج قسمت و باقیمانده  $\frac{x^m + a^m}{x + a}$  را بدون انجام عمل تقسیم پیدا کنید :

$$R = f(-a) = (-a)^m + a^m$$

در صورتی که  $m$  فرد باشد :  $R = 0$  .

در صورتی که  $m$  زوج باشد :  $R = 2a^m$  .

و خارج قسمت را مانند شماره ۴۳ پیدا کنید .

از آنچه گفته شد نتیجه می گیریم :

I - دوجمله ای  $x^m - a^m$  بر  $x - a$  همواره قابل قسمت است .

II - دوجمله ای  $x^m + a^m$  بر  $x - a$  هیچوقت قابل قسمت نیست .

III - دوجمله ای  $x^m - a^m$  بر  $x + a$  وقتی قابل قسمت است که  $m$  زوج باشد .

IV - دوجمله ای  $x^m + a^m$  بر  $x + a$  وقتی قابل قسمت است که  $m$  فرد باشد .

### تمرین

کدامیک از عبارات زیر اسم یا منطقتد ؟

$\frac{x}{x+1}$	۲-	$3a - 2\sqrt{b}$	۱-
$(x+1)\sqrt{x^2}$	۴-	$\sqrt{x} + 2$	۳-
$\sqrt{x^2+1}$	۶-	$x - \frac{1}{x+1}$	۵-
$2x\sqrt{y+1} + xy$	۸-	$\sqrt{ax} + 1$	۷-
$x\sqrt{2} - y$	۱۰-	$\sqrt{x} + y$	۹-
$2x\sqrt{2} + ax^2\sqrt{2}$	۱۲-	$\frac{\sqrt{a-2}}{b+1}$	۱۱-

درجه عبارتهای زیر را اولاً - نسبت به حرف  $x$  ، ثانیاً - نسبت به حرف  $y$  معین کنید . هر یک از عبارات را بر حسب قوای صعودی  $x$  و همچنین بر حسب قوای صعودی  $y$  مرتب کنید . تعیین کنید ، کدامیک از عبارات زیر بر حسب  $x$  کامل می باشد .

$$\begin{aligned} 13- & 10x^5 - 3x^2y + 1 + 5y^2 - 7xy^2 \\ 14- & 2x^2 - 7x^2y + 5y^2 + 2 - 2xy^2 - 4y^2 \\ 15- & x^2y - xy^2 + x^2 - y^2 \\ 16- & 2x^2 + xy + 4y^2 \end{aligned}$$

$-(-r)^r$	-۳۵	$(-1)^r$	-۳۴
$(\frac{r}{\delta})^r$	-۳۷	$(-\frac{r}{y})^r$	-۳۶
$-(\frac{1}{y})^r$	-۳۹	$(\frac{1}{10})^0$	-۳۸
$(-6)^r(-5)^r$	-۴۱	$42 \times 7^r$	-۴۰
$(r^r)^r$	-۴۳	$(r^r)^r$	-۴۲
$7^r : 7^r$	-۴۵	$1^{11} : 1^r$	-۴۴
$24^r : 11^r$	-۴۷	$3^0 \times 3^r$	-۴۶
$a^r \times a^r \times a^r$	-۴۹	$a^r \times a$	-۴۸
$(ra^r b^r)^r$	-۵۱	$(x^r y^0)^r$	-۵۰
$(rx-ry)^r (rx-ry)^r$	-۵۳	$(a+b)^r (a+b)$	-۵۲

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$va^r + \wedge ab$	-۵۵	$ra \times \delta b$	-۵۴
$rab^r \times \frac{1}{y} a^r b^r$			-۵۶
$(-\frac{r}{y} a^r bc^r)(\frac{r}{y} ab^r c)$			-۵۷
$(-\frac{\delta}{y} a^r bxy^r)(-\frac{r}{\delta} ax^r y)$			-۵۸
$(\frac{r}{y} a^r bxy^r)(-\frac{r}{y} a^r b^r y^r)$			-۵۹
$ya(9a + 2b - \delta c)$			-۶۰
$-9a^r b(-\delta a^r + rab^r - \wedge b^r)$			-۶۱
$(x-2)(x^r - rx - \wedge)$			-۶۲

$$x^r + x^0 y - a^r y^r + \wedge x^r y^r - x^r y^r + x + \wedge \quad -۱۷$$

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$va^r - \wedge b^r + \delta c^r = (a^r - \wedge b^r - \wedge \wedge c^r)$	-۱۸
$rx - (yx - \delta) + r + (x - y)$	-۱۹
$\frac{1}{y} a^r x + \frac{1}{y} a^r x - \frac{y}{y} x^r + \frac{1}{y} a^r x + x^r$	-۲۰
$ax^r + bx^r + cx + d - yva^r x - \frac{y}{y} bx^r - yd$	-۲۱
$9c - [ -y - (ye - \delta) ]$	-۲۲
$x - [(y - x) - (y - \wedge)]$	-۲۳
$(a + b - c) - [ - (b - rc + a) ]$	-۲۴
$-\delta a^r - rax + x^r - [ra^r + \delta ax - (ra^r - \wedge ax)]$	-۲۵
$c + [ -d - (r + rc) + y ] - [ \delta - (-c + rd) ]$	-۲۶
$rm - [ -rx - (\delta m + n) ] -$	-۲۷

$$[m - (rm - rn) - \delta x]$$

$$- \left\{ -r - [ -\delta - r(1 - a) - a ] - (r - a) \right\} \quad -۲۸$$

$$a^r + \frac{ab}{y} + b^r - \frac{a^r}{y} + ab + \frac{b^r}{y} - \frac{b^r}{y} \quad -۲۹$$

$$(rx^m + \wedge x^{m-1} + 9x^{m-2} - y) + \quad -۳۰$$

$$(yx^m + \wedge x^{m-1} + yx^{m-2} - \wedge) - (x^{m-2} + x^{m-1})$$

$$(a+b)x + (b+c)y - [(a+b)x - (b+c)y] \quad -۳۱$$

حاصل توانهای زیر را بدست آورید :

$$(-3)^r \quad -۳۳ \quad (-10)^r \quad -۳۲$$

$$\begin{aligned}(x^r - rx + r)^r & -92 \quad (r - x^r + rx)^r & -91 \\(rx^r + rx + 1)(rx - 1)^r & -93 \quad (x^r - x^r + x - 1)^r & -92 \\(x^r + 1)^r & -96 \quad (rx - r)^r & -95 \\(rxy - \frac{1}{x})^r & -98 \quad (\frac{x^r}{r} - \frac{x}{r})^r & -97 \\[ra(ra + x^r) + x^r][ra^r + x^r - rax^r] & -99\end{aligned}$$

به کمک بینم نیوتن عبارتهای زیر را بسط دهید :

$$\begin{aligned}(a+b)^r & -100 \quad (a-b)^r & -101 \\(a \pm b)^{\delta} & -102 \quad (a \pm b)^r & -103 \\1/01^r & -104 \quad (rx \pm 1)^{\delta} & -105 \\1/99^r & -106 \quad 0/98^{\delta} & -107\end{aligned}$$

عبارتهای زیر را به صورت عوامل ضرب در آورید :

$$\begin{aligned}r \circ a^r b^r - r \Delta a^r b^r + r \Delta a^{\delta} & -108 \\ra^r x^r - rax^r + r \Delta a^r x^{\delta} - r \Delta a^r & -109 \quad r \Delta a^r + r \circ a^r - r \Delta a^r & -110 \\ra^r b^r c^r d - rab^r c^r + ra^r b^r c^r d^r & -111 \\r \Delta a^r b^r - r \circ a^r b^r + r \Delta ab^r - r \Delta a^r b & -112 \\- r \Delta ax^m - r \Delta ra^r x^{m+1} - r \Delta a^r x^{m+2} & -113 \\x^{m+n} y^m - x^m y^{m+n} - x^m y^m & -114 \\x^r - \frac{1}{r} & -115 \quad a^r - a & -116 \\ \frac{x^r}{a^r} - \frac{y^r}{b^r} & -117 \quad r m^r - rx^r & -118 \\x^{\delta} - 1 & -119 \quad 1/r x^r y^r - r \Delta a^r b^r c^r & -120 \\ra^{\delta} - r \Delta ab^{\delta} & -121 \quad rax^r - r ay^r & -122 \\a^r + rab + rb^r & -123 \quad x^{\delta m} - rx^m y^{\delta n} & -124\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^r - 1)(a^r | a^r | a^r) & -93 \\(a^m + rb^m - c^m)(ra^m - rb^m + c^m) & -94 \\(x^{K-1} + x)(x^{K-1} + x^r) & -95 \\1ra^r c^r : ra^r c & -96 \\(a^r b^r c^r : a^r b^r c)^r & -97 \\[rb^{\delta} \cdot b^r \cdot c^r : r(-c)^r]^r & -98 \\(1ra^r b^r - r \Delta a^r b^r) : ra^r b^r & -99 \\(r \Delta x^r - r \Delta x^r + rx - 1) : (rx - 1) & -100 \\(x^r - 1) : (x + 1) & -101 \\(r \Delta x^{\delta} + 1) : (rx + 1) & -102\end{aligned}$$

به کمک اتحادها، حاصل عبارتهای زیر را معین کنید :

$$\begin{aligned}(rx^r + r)^r & -103 \quad (rx + r)^r & -104 \\(\frac{r}{r} x^r + \frac{r}{r} x)^r & -105 \quad (x - \frac{1}{r})^r & -106 \\(rx^r - \frac{1}{r})^r & -107 \quad (x^{\delta} + 1)^r & -108 \\(x^r - \frac{1}{x^r})^r & -109 \quad (x + \frac{1}{x})^r & -110 \\(rx + r)(r - rx) & -111 \quad (rx - r)(rx + r) & -112 \\(a + rb - c)(a - rb + c) & -113 \quad r \Delta (a - b + c)(a + b - c) & -114 \\(x + y - rz)(x - y - rz) & -115 \\(1 + ra + rb + rc)(1 + ra - rb - rc) & -116 \\(x + ra)(x - \Delta a) & -117 \quad (x - \Delta)(x - \gamma) & -118 \\(rab + cd)(cd - rab) & -119 \\[(a+b) + (c-d)][(a+b) - (c-d)] & -120\end{aligned}$$

$$(x-a)^r(b-c) + (x-b)^r(c-a) + (x-c)^r(a-b) + (a-b)(b-c)(c-a) \equiv 0 \quad \text{—۱۵۴}$$

(اتحاد اولی)

$$(x-a)^r(c-b) + (x-a)[(x-c)^r - (x-b)^r] + (x-b)(x-c)[(x-b)^r - (x-c)^r] - (b-c)(c-a)(a-b)(rx-a-b-c) \equiv 0 \quad \text{—۱۵۵}$$

$$(a^r + b^r)(a^r + b^r) - (aa' + bb')^r \equiv (ab' - ba')^r \quad \text{—۱۵۶}$$

(اتحاد لاگرانژ)

$$(a+b-c)^r + (a-b+c)^r + (b+c-a)^r + 2abc \equiv (a+b+c)^r \quad \text{—۱۵۷}$$

کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{2a^r b^r c^r}{1abbd} \quad \text{—۱۵۹} \quad \frac{-12acx^r}{2a^r c^r x} \quad \text{—۱۵۸}$$

$$\frac{2da^r b^r c^r}{1da^r b^r c^r} \quad \text{—۱۶۱} \quad \frac{92a^r b^r c^r}{888a^r b^r c^r} \quad \text{—۱۶۰}$$

$$\frac{ax^r - a^r}{2am + 2a} \quad \text{—۱۶۳} \quad \frac{12x^r - 2xy}{16x^r} \quad \text{—۱۶۲}$$

$$\frac{b+b^r}{a+ab} \quad \text{—۱۶۵} \quad \frac{22a^r - 20a^r m}{2dam^r - 2dm^r} \quad \text{—۱۶۴}$$

$$\frac{ax + x^r}{ab^r + b^r x} \quad \text{—۱۶۷} \quad \frac{14a^r - 7ax}{10ay - 5xy} \quad \text{—۱۶۶}$$

$$\frac{b^r x^r - a^r b^r x^r}{a^r b^r x^r - a^r b^r x} \quad \text{—۱۶۹} \quad \frac{12a^r x^r + 2a^r x^r}{18ab^r x + 3ab^r x^r} \quad \text{—۱۶۸}$$

$$\frac{2\delta + \delta x + \gamma y + xy}{\delta + y} \quad \text{—۱۷۱} \quad \frac{ac + bc + ad + bd}{a^r + ab} \quad \text{—۱۷۰}$$

$$\frac{x^r - 2ax + 2a^r}{x^r - 2a^r} \quad \text{—۱۷۳} \quad \frac{22a^r + 51ab + 1\delta b^r}{2a + 2b} \quad \text{—۱۷۲}$$

$$a^r + a + \frac{1}{r} \quad \text{—۱۲۶} \quad 9a^r - 12ab + 2b^r \quad \text{—۱۲۵}$$

$$\frac{x^r}{12} - \frac{2}{r} ax + 9a^r \quad \text{—۱۲۸} \quad 9x^r - 2xy + \frac{y^r}{r} \quad \text{—۱۲۷}$$

$$x^r + (a-b)x - ab \quad \text{—۱۳۰} \quad x^r + ax + ab + bx \quad \text{—۱۲۹}$$

$$8ax - bx + 8ay - by \quad \text{—۱۳۱}$$

$$x^r - b^r \pm 2bc - c^r \quad \text{—۱۳۳} \quad a^r \pm 2ab + b^r - c^r \quad \text{—۱۳۲}$$

$$m^r - x^r + 2xp - p^r \quad \text{—۱۳۵} \quad x^r + 2x - y^r + 1 \quad \text{—۱۳۴}$$

$$a^r + b^r + a^r b^r \quad \text{—۱۳۷} \quad 2a^r + b^r \quad \text{—۱۳۶}$$

$$a^r - b^r + x^r - y^r + 2(ax - by) \quad \text{—۱۳۸}$$

$$a^r - c^r - 2(ad - bc) - b^r + d^r \quad \text{—۱۳۹}$$

$$9a^r - 12a^r p + 2ap^r \quad \text{—۱۴۰}$$

$$a^r - 2a^r - 2a \quad \text{—۱۴۲} \quad a^r p^r + 2a^r p + 9a \quad \text{—۱۴۱}$$

$$2a^r x^r y + 2a^r x^r y^r + 2a^r x^r y^r - 2a^r x^r y^r \quad \text{—۱۴۳}$$

$$22a^r x^r y^r - 22a^r x^r y^r z + 2a^r x^r y^r z^r \quad \text{—۱۴۴}$$

$$2a^r x^r - 22a^r x^r + 22a^r x^r \quad \text{—۱۴۵}$$

$$(x-y)(x^r - z^r) - (x-y)(x^r - y^r) \quad \text{—۱۴۶}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) - (x-1) \quad \text{—۱۴۷}$$

$$a^r - a^r + a^r - a \quad \text{—۱۴۹} \quad a^r - ab - b - 1 \quad \text{—۱۴۸}$$

$$2a^r b^r - (a^r + b^r - c^r)^r \quad \text{—۱۵۰}$$

$$2(ad + bc)^r - (a^r - b^r - c^r + d^r)^r \quad \text{—۱۵۱}$$

$$2a^r b^r + 2a^r c^r + 2b^r c^r - a^r - b^r - c^r \quad \text{—۱۵۲}$$

دستی اتحادهای زیر را ثابت کنید :

$$(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b) \equiv 0 \quad \text{—۱۵۳}$$

$$\frac{a^r - rab}{a + rb} \times \frac{a^r - ab - \gamma b^r}{a^r} \quad -۱۸۶$$

$$\frac{[(b-c)^r - a^r][b^r - (a+c)^r]}{(a^r - c^r + b^r + rab)(c^r - b^r - a^r + rab)} \quad -۱۸۷$$

$$\frac{(a^r - b^r)(a^r + a^r b^r + b^r)}{a^r - a^r b^r} \quad -۱۸۸$$

$$\frac{x^r - r}{x^r - x - r} : \frac{x^r - rx - \lambda}{x^r - rx - r} \quad -۱۸۹$$

$$\frac{x^r + 1}{r - rx + rx^r} : \left[ \frac{x^r + rx^r + rx + 1}{x^r - rx + r} \times \frac{x^r - x - r}{(x+1)^r} \right] \quad -۱۹۰$$

$$\frac{a^r - b^r + c^r + rac}{a^r - b^r + c^r - rac} : \frac{a^r - c^r - b^r + rbc}{b^r - (a-c)^r} \quad -۱۹۱$$

$$\frac{(a-b)^r - c^r}{a^r + ab - bc - ac} \times \frac{ab^r c - b^r c^r}{a^r b^r c - a^r b^r c + a^r b^r c} : \frac{ab^r c + ab^r c^r - a^r b^r c}{a^r b + a^r b^r} \quad -۱۹۲$$

حاصل هريك از عبارتهای زیر را پيدا كنيد :

$$rx + \frac{r - rx}{\delta} \quad -۱۹۳ \quad \delta x + \frac{rx - r}{rx^r} \quad -۱۹۴$$

$$1 + \frac{a-b}{a+b} \quad -۱۹۵ \quad x - \frac{x}{x-1} \quad -۱۹۶$$

$$rb - \frac{ab+b^r}{ra} \quad -۱۹۸ \quad rx - \frac{rax - x^r}{ra - x} \quad -۱۹۷$$

$$1 - x + x^r - \frac{x^r}{1+x} \quad -۲۰۰ \quad a + b - \frac{a^r - b^r}{a + rb} \quad -۱۹۹$$

$$\frac{rax^r + ra^r x - r a^r x^r}{ax^r - a^r x} \quad -۱۷۳$$

$$\frac{x^r - 1}{(1+ax)^r - (x+a)^r} \quad -۱۷۵$$

$$\frac{(a^r + b^r - c^r)^r - (a^r - b^r + c^r)^r}{rab^r + rabc} \quad -۱۷۶$$

$$\frac{x^{\delta} - ax^r - a^r x + a^{\delta}}{x^r - ax^r - a^r x^r + a^r x} \quad -۱۷۷$$

$$\frac{a^r + b^r - c^r + rab}{a^r + c^r - b^r + rac} \quad -۱۷۸$$

$$\frac{(a^r + rab^r x^r + x^r)(a^r - x^r)}{(a^r + x)(a^r - a^r x + a^r x^r - x^r)} \quad -۱۷۹$$

$$\frac{(x^r - 1)(r^r - 1)}{(xy + 1)^r - (x + y)^r} \quad -۱۸۰$$

$$\frac{(x+y)^r - (x+y)^r}{(x+y)^r + (x+y)^r} \quad -۱۸۱$$

$$\frac{1 - ax + a(a+x)}{(1-ax)^r + (a+x)^r} \quad -۱۸۲$$

حاصل عبارتهای زیر را تعيين كنيد :

$$\frac{a^r - b^r}{a} \times \frac{rab}{(a+b)^r} \quad -۱۸۳$$

$$\frac{x^r + a^r}{x^r - a^r} \times \frac{x-a}{x+a} \times \frac{x^r + ax + a^r}{x^r - ax + a^r} \quad -۱۸۴$$

$$\frac{a^r - ra - 1\delta}{ra^r} \times \frac{a^r + ra + \lambda}{a^r + \delta a + r} \times \frac{a^r - ra - 1\delta}{ra^r - ra^r} \quad -۱۸۵$$

$$\frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-2x^2-x+2} \quad -215$$

$$\frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad -216$$

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)} \quad -217$$

$$\frac{(x-a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-b)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-c)^2}{(c-a)(c-b)} \quad -218$$

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) + \quad -219$$

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \quad -220$$

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \quad -221$$

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)} \quad -222$$

$$-223 \quad x = \frac{(a+b)^2}{a-b} \text{ به فرض آنکه } x \text{ باشد حاصل عبارت زیر را بدست}$$

آورید :

$$\frac{a-b}{ab}x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + \frac{(a+b)(a^2-b^2)}{2ab}$$

$$\frac{2+x^2-2x}{2+x} - 2-x - 202 \quad 1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} \quad -201$$

$$\frac{yb}{2a} - \frac{1}{2c} + \frac{2ac}{2ab} \quad -202 \quad \frac{2a}{2b} + \frac{2a}{2b} + \frac{2c}{2b} \quad -203$$

$$\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} \quad -200$$

$$\frac{x-a}{x+a} - \frac{ax}{x^2-a^2} + \frac{2ax-x^2-a^2}{x^2-a^2} \quad -206$$

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{ab}{a-b} + \frac{2a^2-ab^2}{a^2-b^2} \quad -207$$

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{2a^2x^2}{a^2+x^2-ax} - \frac{ax(2a^2+x^2)}{x^2+a^2} \quad -208$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-2} \quad -209$$

$$\frac{y+2}{y^2+y-2} + \frac{y-2}{y^2+2y} \quad -210$$

$$\frac{2x^2-x+2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \quad -211$$

$$2x-2y + \frac{2x+2y}{2-2x} - \frac{2+2y}{2(1+x)} - \frac{2x+2y+\Delta xy}{2-x-2x^2} \quad -212$$

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2-a^2)(y^2-a^2)}{a^2(a^2-b^2)} + \frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)}{b^2(b^2-a^2)} \quad -213$$

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b-c} + \frac{(b+c)^2-a^2}{b+c-a} + \frac{(c+a)^2-b^2}{c+a-b} \quad -214$$

۲۴۴- اگر  $a^2 = b^2 + c^2$  باشد حاصل عبارت زیر را پیدا کنید :

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2$$

باقیمانده هریک ازتقسیمهای زیر را معین کنید :

$$(2a^2 + 5a^2 - 9a) : (a - 1) \quad -245$$

$$(x^2 - 8x - 9) : (x - 2) \quad -246$$

$$(2x^2 + 16x^2 - 68x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad -247$$

$$(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) : (x + 1) \quad -248$$

$$(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5) : (x - 2b) \quad -249$$

۲۵۰- ضریب m را بطریقی تعیین کنید که عبارت :

$$x^4 - 3x^3 + mx^2 + 7x + 6$$

۲۵۱- به ازای چه مقادیر m هریک ازعبارتهای :

$$x^4 + ma^2x^3 + a^4 \text{ و } x^4 - max^3 + ma^2x - a^2$$

بر  $x^2 - 2ax + a^2$  قابل قسمت است .

۲۵۲- ضرایب m و n و p را بطریقی تعیین کنید که عبارت :

$$(x^2 - 1)(x - 2) \text{ بر } x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$$

قابل قسمت باشد .

۲۵۳- ضرایب p و q را بطریقی تعیین کنید که عبارت زیر بر

$$x^2 + 2x + 5$$

$$x^4 + px^3 + q$$

خارج قسمت وباقیمانده هریک ازتقسیمهای زیر را معین کنید :

$$(x^5 + 1) : (x - 1) \quad -245 \quad (a^2 - 1) : (a - 1) \quad -246$$

$$(x^2 + y^2) : (x + y) \quad -247 \quad (a^2 + b^2) : (a + b) \quad -248$$

$$(x^2 - b^2) : (x \pm b) \quad -249 \quad (x^2 - 1) : (x \pm 1) \quad -250$$

$$(32x^5 + 243) : (2x + 3) \quad -251 \quad (a^6 - 1) : (a \pm b) \quad -252$$

حاصل کسرهای مرکب زیر را معین کنید :

$$-244 \quad \frac{\frac{a^2b^2}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}}{2 - \frac{b}{a}}$$

$$-245 \quad \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{x}}}$$

$$-246 \quad \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} - \frac{1}{b}} \quad -247 \quad \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2 - 9y^2}{(x-y)^2}}$$

$$-248 \quad \frac{\frac{x^2 + 1}{1 - x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \quad -249 \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$-250 \quad \frac{\frac{a-b}{a} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a+b}{b} - \frac{a}{a-b}} : \frac{1 - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$-251 \quad \left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}\right)x^2 : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \frac{1-x}{1+x}\right) \quad -252$$

۲۵۳- اگر  $a + b + c = 0$  باشد ثابت کنید :

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9$$



$$(4x^3 - 6x^2 - 5x + 1) : (x + 2) \quad -۲۵۲$$

$$(x^2 - 7x) : (x - 2) \quad -۲۵۳$$

$$(x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 1) : (x - 1) \quad -۲۵۴$$

۲۵۵- فرض می‌کنیم در تقسیمی با باقیمانده صفر، مقسوم و مقسوم‌علیه

بترتیب عبارتهایی به صورت  $x^m \pm a^m$  و  $x \pm a$  و خارج قسمت یکی از

عبارتهای زیر باشد :

$$x^2 - x + 1 \quad -۱$$

$$x^2 - x^2 + x - 1 \quad -ب$$

$$x^2 + ax^2 + a^2x + a^3 \quad -ج$$

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \quad -د$$

$$x^2y^2 + mx^2y^2 + m^2xy + m^3 \quad -ه$$

مقسوم و مقسوم‌علیه را در هر يك از حالات بالا تعیین کنید .

## فصل دوم

### ریشه اعداد و اعمال مربوط به آن

۱- توانهای زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} (+4)^2 = +16 \\ (-4)^2 = +16 \end{cases} \quad \begin{cases} (+2)^2 = +8 \\ (-2)^2 = -8 \end{cases}$$

(+۱۶) توان دوم اعداد (+۴) و (-۴) است و همچنین (+۸)

توان سوم (+۲) و (-۲) توان سوم (-۲) است .

بالعکس (+۴) و (-۴) را ریشه دوم (+۱۶) می گویند و

(+۲) را ریشه سوم (+۸) و (-۲) را ریشه سوم (-۸) می نامند .

اگر  $m$  عددی صحیح و مثبت و  $A$  عددی جبری باشد، ریشه

$m$ ام عدد جبری  $A$  (چنانچه موجود باشد) عددی جبری است مانند

$a$  بطوری که داشته باشیم :

$$(۱) \quad a^m = A$$

واضح است که باید قدر مطلقهای  $a^m$  و  $A$  متساوی و علامتهای

آنها متحد باشند . ریشه  $m$ ام عدد جبری  $A$  را به صورت  $\sqrt[m]{A}$

می نویسند . علامت  $\sqrt{\quad}$  را رادیکال و  $\sqrt{\quad}$  ، شاخه اول رادیکال ، را

فرجه رادیکال می گویند.

اگر  $A$  عدد مثبتی باشد،  $a^m$  نیز مثبت است.

الف - اگر  $A$  مثبت و  $m$  جفت باشد،  $a$  می تواند مثبت یا منفی

باشد. (چرا؟)

ب - اگر  $A$  منفی و  $m$  جفت باشد، رابطه (۱) هیچوقت بر-

قرار نیست.

ج - اگر  $A$  مثبت و  $m$  فرد باشد، باید  $a$  مثبت باشد.

د - اگر  $A$  منفی و  $m$  فرد باشد، باید  $a$  منفی باشد.

از آنچه گفته شد نتایج زیر بدست می آید:

I - اعداد مثبت، دوریشه زوج دارند که این دوریشه قرینه

$$\text{یکدیگرند: } a' = +\sqrt[m]{A} \text{ و } a'' = -\sqrt[m]{A}$$

ریشه چهارم ۸۱ اعداد  $(-۳)$  و  $(+۳)$  است و آن را چنین

می نویسند:

$$-\sqrt[4]{81} = -۳ \text{ و } +\sqrt[4]{81} = +۳$$

II - اعداد مثبت، یک ریشه فرد دارند که علامتش  $(+)$  است

مانند:

$$\sqrt[3]{64} = +۴$$

III - اعداد منفی، یک ریشه فرد دارند که علامتش  $(-)$

است.

$$\text{مانند: } \sqrt[3]{-۸} = -۲ \text{ و } \sqrt[5]{-۲۴۳} = -۳$$

IV - اعداد منفی، ریشه زوج ندارند یا به عبارت دیگر ریشه

زوج آنها موهومی است.

«مثلا رادیکالهای  $\sqrt[4]{-۱۶}$  و  $\sqrt[6]{-۱}$  جواب ندارند.»

تبصره ۱ - ریشه دوم هر عدد را جذر و ریشه سومش را کعب

آن عدد می گویند.

تبصره ۲ - وقتی که بخواهیم از عدد مثبتی، ریشه جفت بگیریم،

جلو رادیکال علامت  $\pm$  قرار می دهیم. اگر جلو رادیکال که فرجه

جفت دارد علامتی باشد، مانند  $(+\sqrt[3]{۲۵})$  یا  $(-\sqrt[3]{۲۵})$ ، در این صورت

بترتیب اعداد  $(+۵)$  یا  $(-۵)$  مورد نظر خواهد بود.

تبصره ۳ - اگر بخواهیم جذر  $x^2$  را معین کنیم، چنانچه  $x$

عددی مثبت باشد، خواهیم داشت:  $\sqrt{x^2} = x$  و هر گاه  $x$  عدد منفی

باشد در این صورت خواهیم داشت:  $\sqrt{x^2} = -x$  زیرا رادیکال سمت

چپ مثبت است.

به همین ترتیب در عبارت  $\sqrt{(x-۱)^2}$  باید بنویسیم:

$$\text{اگر } x-۱ > ۰ \text{ باشد، } \sqrt{(x-۱)^2} = (x-۱)$$

$$\text{اگر } x-۱ < ۰ \text{ باشد، } \sqrt{(x-۱)^2} = -(x-۱)$$

۲ - قضیه - شرط لازم و کافی برای برابری دو عدد مثبت

این است که توان  $m$  تمام آنها مساوی باشند.

اولاً شرط لازم است - اگر  $a = b$  باشد ، توان  $m$  ام آنها با

هم متساوی است :  $a^m = b^m$  .

ثانیاً شرط کافی است - به فرض آنکه  $a^m = b^m$  باشد ، آن را به صورت  $a^m - b^m = 0$  می نویسیم . می دانیم این عبارت در همه حال بر  $(a - b)$  قابل قسمت است و با استفاده از این خاصیت ، طرف اول رابطه اخیر را به حاصل ضرب دو عامل تجزیه کرده و آن را به صورت زیر می نویسیم :

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + \dots + b^{m-1}) = 0$$

چون بنا بر فرض ،  $a$  و  $b$  دو عدد مثبت هستند ، بدیهی است که پرانتز دوم برابر صفر نمی شود .

پس باید  $a - b = 0$  باشد ، یعنی داشته باشیم  $a = b$  .

۳ - قضیه اصلی - حاصل ضرب دو رادیکال که دارای یک فرجه و اعداد واقع در زیر آنها مثبت باشند ، مساوی است با رادیکالی که فرجه اش ، فرجه مشترک رادیکالها و عدد واقع در زیر آن ، حاصل ضرب اعداد واقع در زیر رادیکالها باشد .

به فرض اینکه  $A$  و  $B$  دو عدد مثبت باشند ، باید ثابت کنیم :

$$(۱) \quad \sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A \cdot B}$$

فرض می کنیم :

$$(۲) \quad \sqrt[m]{A} = a$$

$$(۲) \quad \sqrt[m]{B} = b$$

$$(۳) \quad \sqrt[m]{A \cdot B} = c$$

بارعایت این فرض باید درستی رابطه زیر را ثابت کنیم :

$$(۵) \quad a \cdot b = c$$

بنابر قضیه قبل رابطه (۵) وقتی بر قرار است که توانهای  $m$  ام طرفین این رابطه متساوی باشند؛ یعنی برای اثبات قضیه کافی است درستی تساوی زیر را ثابت کنیم :

$$(۶) \quad a^m \cdot b^m = c^m$$

برای این منظور ، ملاحظه می کنیم که اولاً از روابط (۲) و (۳) و (۴) نتایج زیر بدست می آید .

$$(۷) \quad A = a^m$$

$$(۸) \quad B = b^m$$

$$(۹) \quad A \cdot B = c^m$$

ثانیاً از ضرب روابط (۷) و (۸) که عضو بعضو در یکدیگر ضرب شوند چنین نتیجه می شود :

$$(۱۰) \quad A \cdot B = a^m \cdot b^m$$

و از مقایسه روابط (۹) و (۱۰) معلوم می شود :

$$(۱۱) \quad a^m \cdot b^m = c^m$$

از بر قراری رابطه (۱۱) که عیناً همان رابطه (۶) است درستی

حکم قضیه یعنی صحت رابطه  $a \cdot b = c$  ویا :

$$\sqrt[m]{\overline{A}} \cdot \sqrt[m]{\overline{B}} = \sqrt[m]{\overline{A \cdot B}}$$

محقق می شود .

$$\text{نتیجه ۱ - از رابطه : } \sqrt[m]{\overline{A \cdot B}} = \sqrt[m]{\overline{A}} \cdot \sqrt[m]{\overline{B}} \quad (۱۲)$$

نتیجه می شود :

ریشه  $m$ ام حاصل ضرب دو عدد مساوی است با حاصل ضرب ریشه های  $m$ ام هر يك از آن دو عدد .

نتیجه ۲ - چنانچه  $\sqrt[m]{\overline{A}} = a$  فرض شود ، رابطه (۱۲) به صورت

$$\sqrt[m]{\overline{A \cdot B}} = a \sqrt[m]{\overline{B}} \quad \text{در می آید که در آن } a \text{ ، ریشه } m \text{ام } A \text{ است . پس}$$

می توان گفت :

برای خارج کردن عاملی از زیر رادیکالی که فرجه اش  $m$  است ، کافی است ریشه  $m$ ام آن عامل را استخراج و حاصل رادیکال ضرب کنند .

مثال :

$$\sqrt[۹]{۹۶} = \sqrt[۹]{۱۶ \times ۶} = ۴ \sqrt[۹]{۶}$$

$$\sqrt[۷]{۵۴} = \sqrt[۷]{۲۷ \times ۲} = ۳ \sqrt[۷]{۲}$$

نتیجه ۳ - هرگاه عددی به صورت عامل ضرب در خارج رادیکالی که فرجه اش  $m$  است قرار داشته باشد ، برای بردن عدد نامبرده به داخل رادیکال ، کافی است قدر مطلق آن عدد را به

توان  $m$  برسانیم و حاصل رادیکال را در مقدار زیر رادیکال ضرب کنیم.

$$۲ \sqrt[۳]{۵} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۵} = \sqrt[۳]{۲۰}$$

$$۵ \sqrt[۷]{۴} = \sqrt[۷]{۵^۷ \times ۴} = \sqrt[۷]{۵۰۰}$$

$$-۳ \sqrt[۴]{۵} = -\sqrt[۴]{۳^۴ \times ۵} = -۳ \sqrt[۴]{۵}$$

در حالت کلی ، هرگاه بخواهیم در عبارت  $a \sqrt[m]{\overline{b}}$  عامل  $a$  را به داخل رادیکال وارد کنیم ، اگر  $a > ۰$  باشد ، نتیجه عمل چنین می شود :

$$\sqrt[m]{\overline{a^m \cdot b}} \quad \text{و اگر } a < ۰ \text{ باشد چنین خواهیم داشت :}$$

$$-\sqrt[m]{\overline{(|a|)^m \cdot b}}$$

نتیجه ۴ - در ضرب چند رادیکال با فرجه های متساوی ، کافی است یکی از رادیکالها را با همان فرجه مشترک نوشته و مقادیر زیر رادیکالها را در هم ضرب کنیم و زیر رادیکال بنویسیم :

$$\sqrt[m]{\overline{A}} \cdot \sqrt[m]{\overline{B}} \cdot \sqrt[m]{\overline{C}} = \sqrt[m]{\overline{A \cdot B \cdot C}}$$

نتیجه ۵ - برای آنکه ریشه  $p$ ام  $A$  را به توان  $q$  برسانیم ، کافی است مقدار زیر رادیکال را به توان  $q$  برسانیم ( $q$  عددی است صحیح و مثبت).

باید ثابت کنیم :

$$(\sqrt[p]{\overline{A}})^q = \sqrt[p]{\overline{A^q}}$$

کافی است  $\sqrt[p]{\overline{A}}$  را  $q$  دفعه در خود ضرب کنیم :

q مرتبه

$$(\sqrt[q]{A})^q = \sqrt[q]{A} \cdot \sqrt[q]{A} \cdots \sqrt[q]{A} = \sqrt[q]{A^q}$$

۴- برای تقسیم دورادیکال دارای يك فرجه ، کافی است که یکی از رادیکالها را با همان فرجه مشترك نوشته و مقدار واقع در زیر رادیکال مقسوم را بر مقدار واقع در زیر رادیکال مقسوم علیه تقسیم کنیم و حاصل را زیر رادیکال بنویسیم.  
باید ثابت کنیم :

$$(E) \quad \sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

این تقسیم را امتحان می کنیم :

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{\frac{A}{B} \times B} = \sqrt[m]{A}$$

پس رابطه (E) صحیح است .

مثال :

$$\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

۵- قضیه - برای استخراج ریشه mام  $\sqrt[m]{A}$  کافی است فرجه رادیکال را در m ضرب کنیم .

برای اثبات رابطه:  $\sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = \sqrt[m \cdot p]{A}$  کافی است طرفین تساوی

را به توان mp برسانیم. توان mp ام رادیکال سمت راست A می شود. و رادیکال سمت چپ را ابتدا به توان m می رسانیم ، خواهیم داشت  $\sqrt[p]{A}$  و سپس به توان p می رسانیم، حکم ثابت می شود .

مثال :

$$\sqrt[2]{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[10]{5}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[12]{4}, \quad \sqrt[4]{\sqrt[6]{6}} = \sqrt[24]{6}$$

۶- قضیه - هرگاه فرجه و توان عدد زیر رادیکال را در عدد صحیح مثبتی مانند p ضرب کنیم ، درقدر مطلق ریشه تغییر یابد ایجاد نمی شود .

برای اثبات درستی رابطه:  $\sqrt[p]{A} = \sqrt[pq]{A^q}$  ، کافی است طرفین

این تساوی را به توان pq برسانیم .

تبصره - بطور کلی اگر A مثبت باشد،  $\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{A^p}$  است.

ولی هرگاه A منفی باشد، واضح است که ریشه جفت نخواهد داشت

یعنی باید m فرد باشد تا  $\sqrt[m]{A}$  دارای معنی باشد. در این حالت اگر

بخوایم فرجه و توان عدد زیر رادیکال را در p ضرب کنیم، باید توجه داشته باشیم که :

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m \cdot p]{A^p} \quad \text{اگر } p \text{ فرد باشد :}$$

واضح است  $b$  و  $c$  باید مثبت باشند تا دو رادیکال  $\sqrt[6]{b^2}$  و

$\sqrt[6]{c}$  معنی داشته باشد و اما  $a$  می تواند مثبت یا منفی باشد.

چنانچه  $a$  مثبت باشد:

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^2} \text{ و } \sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{b^2} \text{ و } \sqrt[6]{c} = \sqrt[12]{c^2}$$

و چنانچه  $a$  منفی باشد:

$$\sqrt[6]{a} = -\sqrt[12]{a^2}$$

**نتیجه** - می توان فرجه رادیکال و توان مقدار زیر رادیکال را

بر عددی صحیح و مثبت تقسیم کرد.

**مثال:**

$$\sqrt[12]{a^2} = \sqrt[6]{a} \text{ و } \sqrt[12]{b^2} = \sqrt[6]{b}$$

$$\sqrt[6]{x} = \sqrt[12]{x^2} \text{ توجه - } \sqrt[6]{x} = \sqrt[12]{x^2} \text{ (اگر } x \text{ مثبت باشد) و } \sqrt[6]{-x} = -\sqrt[12]{x^2}$$

(وقتی  $x$  منفی باشد).

**۸- جمع و تفريق رادیکالها** - فقط رادیکالهای متحد رami توان

جمع جبری کرد. مقصود از رادیکالهای متحد، رادیکالهایی است که مقادیر

واقع در زیر آنها با هم و فرجه های آنها نیز با هم مساوی باشند.

اگر  $p$  زوج باشد:  $\sqrt[m]{A} = -\sqrt[m]{A^p}$

$$\sqrt[6]{\Delta} = \sqrt[6]{\Delta^2} = \sqrt[3]{\Delta}$$

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^{2 \times 2}} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt[6]{-2} = \sqrt[6]{(-2)^5} = \sqrt[15]{-32}$$

$$\sqrt[6]{-2} = -\sqrt[6]{(-2)^2} = -\sqrt[3]{4}$$

**۷- فرجه مشترك جبری** - می توان فرجه های چند رادیکال را

با هم مساوی کرد؛ به این ترتیب که ابتدا کوچکترین مضرب مشترك

فرجه ها را تعیین می کنیم و آن را فرجه مشترك رادیکالها قرار می دهیم.

سپس فرجه مشترك را به هریک از فرجه های اصلی تقسیم کرده و خارج

قسمت را توان مقدار زیر رادیکال مربوط قرار می دهیم.

**مثال:** فرجه مشترك  $\sqrt[6]{2}$  و  $\sqrt[4]{3}$ ، کوچکترین مضرب

مشترك فرجه ها یعنی عدد ۱۲ است، پس می توانیم بنویسیم:

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2} \text{ و } \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}$$

**تمرین-**  $\sqrt[6]{c}$  و  $\sqrt[4]{b^2}$  و  $\sqrt[3]{a}$  را ب یک فرجه تبدیل کنید.

مجموع چند رادیکال متحد، رادیکالی است متحد با آنها که ضریب حاصل جمع جبری ضرایب رادیکالهاست.

مثال :

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$3\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}$$

$$16\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 20\sqrt{a} = \sqrt{a}$$

۹- ضرب و تقسیم رادیکالها - همه وقت می توان دو رادیکال دادرهم ضرب یا بریکدیگر تقسیم کرد. اگر فرجهها متساوی باشند یکی از رادیکالها را نوشته و مقادیر زیر رادیکال را ضرب یا تقسیم می کنیم. هر گاه فرجهها متساوی نباشند، قبلا باید فرجهها را مشترک کرد.

مثال :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{108} : \sqrt{12} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{256} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{256 \div 8} : \sqrt[3]{8 \div 8} = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$$

۱۰- نمای کسری - می دانیم ریشه  $m$ ام عدد  $A$  را به صورت

$\sqrt[m]{A}$  می نویسند. چنانچه  $A = a^n$  باشد، در این صورت رادیکال نامبرده

به صورت  $\sqrt[n]{a^n}$  نوشته خواهد شد. رادیکال اخیر را می توان به صورت:

$a^{\frac{n}{m}}$  نیز نوشت که نماینده  $a$  کسر  $\frac{n}{m}$  باشد. یعنی :

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

از رابطه اخیر معلوم می شود که قوه کسری هر عدد را می توان به صورت رادیکالی نوشت که مخرج کسر نماینده فرجه رادیکال و صورت آن، نماینده همان عدد در زیر رادیکال باشد؛  $a^{\frac{r}{s}}$  را به صورت  $\sqrt[s]{a^r}$  و  $a^{\frac{1}{r}}$  را به صورت  $\sqrt[r]{a}$  و  $\sqrt{x}$  را به صورت  $\sqrt[2]{x}$  می توان نوشت.

بعکس،  $\sqrt{x}$  و  $\sqrt[r]{(x+1)^r}$  را بترتیب می توان به صورتهای

زیر نوشت :

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[r]{(x+1)^r} = (x+1)^{\frac{r}{r}} \quad \text{و}$$

تبصره - کلیه اعمالی که در رادیکالها گفته شد، با استعمال نماینده

کسری هم می توان انجام داد. مثلا :

$$\sqrt{x} \times \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5} = x \sqrt[6]{x}$$



$$(\sqrt[n]{x})^r = (x^{\frac{r}{n}})^r = x^{\frac{r}{n} \times r} = x^{\frac{r^2}{n}} = x^{\frac{r}{n} + \frac{r}{n} + \dots + \frac{r}{n}} = x^{\frac{r}{n}} \times x^{\frac{r}{n}} \times \dots \times x^{\frac{r}{n}} = x^{\frac{r}{n}} \sqrt[n]{x}$$

۱۱- تعریف - کسری را اسم یا کنگ می‌گویند که جمله‌ای از

آن زیر رادیکال باشد.

۱۲- گویا کردن مخرج‌های کنگ - مقصود از گویا کردن

مخرج‌های کنگ حذف رادیکال از مخرج کسرهاست، بطوری که کسر اول و کسر حاصل معادل باشند.

الف - اگر مقصود گویا کردن مخرج کسر  $\frac{A}{\sqrt{B}}$  باشد (A)

و B نمایش عبارات جبری هستند) کافی است صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج ضرب کنیم.

مثال:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B} \cdot \sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

$$\frac{r}{\sqrt{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{r} \times \sqrt{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{r}$$

$$\frac{r}{r\sqrt{5}} = \frac{r\sqrt{5}}{r\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{r\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{a-1}{r\sqrt{a+1}} = \frac{(a-1)\sqrt{a+1}}{r\sqrt{a+1} \times \sqrt{a+1}} = \frac{(a-1)\sqrt{a+1}}{r(a+1)}$$

ب - برای گویا کردن مخرج کسرهایی که به صورت  $\frac{A}{\sqrt[n]{B^n}}$

بوده و در آنها  $n < m$  باشد، کافی است صورت و مخرج کسر را در

$\sqrt[n]{B^{m-n}}$  ضرب کنیم.

مثال:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{m-n}}}{\sqrt[n]{B^n} \times \sqrt[n]{B^{m-n}}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{m-n}}}{B}$$

$$\frac{r}{\sqrt{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{r} \times \sqrt{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{r} = \sqrt{r}$$

ج - برای گویا کردن مخرج کسرهایی که به صورت  $\frac{A}{B \pm \sqrt{C}}$

یا  $\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}}$  باشند، کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج

مخرج ضرب کنیم:

مثال:

$$\frac{1}{\sqrt{r}-1} = \frac{\sqrt{r}+1}{(\sqrt{r}-1)(\sqrt{r}+1)} = \frac{\sqrt{r}+1}{r-1}$$

$$\frac{12}{2+\sqrt{r}} = \frac{12(2-\sqrt{r})}{(2+\sqrt{r})(2-\sqrt{r})} = \frac{12(2-\sqrt{r})}{4-r}$$

$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{r}}{\sqrt{r}-\sqrt{r}} = \frac{(\sqrt{r}+\sqrt{r})(\sqrt{r}+\sqrt{r})}{(\sqrt{r}-\sqrt{r})(\sqrt{r}+\sqrt{r})} = \frac{(\sqrt{r}+\sqrt{r})^2}{r-r}$$

د - برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت:

یا  $\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C} \pm \sqrt{D}}$  ابتدا  $(\sqrt{C} \pm \sqrt{D})$  را يك

جمله فرض کرده و مانند حالت قبل صورت و منخرج کسر را در مزدوج منخرج یعنی :  $B \mp (\sqrt{C} \pm \sqrt{D})$  یا  $\sqrt{B} \mp (\sqrt{C} \pm \sqrt{D})$  ضرب می کنیم .

پس از اختصار ، با ضرب در مزدوج منخرج جدید ، منخرج کسر اصلی گویا می شود .

مثال :

$$\begin{aligned} \frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{(3+4\sqrt{3})[(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{[(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{3}][(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{3}]} \\ &= \frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-3} \\ &= \frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5+4\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(5-4\sqrt{3})}{(5+4\sqrt{3})(5-4\sqrt{3})} \\ &= \frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(5-4\sqrt{3})}{25-48} \\ &= \frac{25\sqrt{6}+22\sqrt{2}+9\sqrt{3}-22}{23} \end{aligned}$$

۵- برای گویا کردن منخرج کسرهایی به صورت :

$$\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}}$$

چون طبق اتحادهای هشتم و نهم شماره (۱۹) داریم :

$$a \pm b = \frac{a^2 \pm b^2}{a^2 \mp ab + b^2}$$

باید صورت و منخرج را در :

$$(\sqrt{B} \mp \sqrt{BC} + \sqrt{C})$$

ضرب کنیم تا منخرج کسر گویا شود . زیرا می دانیم که :

$$(\sqrt{B} \pm \sqrt{C})(\sqrt{B} \mp \sqrt{BC} + \sqrt{C}) = B \pm C$$

مثال :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3+2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

و- برای گویا کردن منخرج کسرهایی به صورت :

$$\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{A}}$$

کافی است ابتدا صورت و منخرج کسر را در مزدوج منخرج

ضرب کرده سپس صورت و منخرج کسر حاصل را نیز در مزدوج منخرجش

ضرب کنیم .

-۷۹-

$$(2 + \sqrt{a})(2 - \sqrt{a}) \quad a > 0$$

$$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) \quad x > 0$$

$$\sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[4]{a^8} (-\sqrt{a}) \quad a > 0$$

$$(1 + \sqrt{r})(2 + \sqrt{r}) \quad -15$$

$$(\sqrt{r} + \sqrt{r} - 1)^2 \quad -16$$

$$(2a\sqrt{b} + b\sqrt{a})(a\sqrt{b} - 2b\sqrt{a}) \quad \left. \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix} \right\} \quad -17$$

$$(3x\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})^2 \quad -18$$

$$2\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{3} \quad -20 \quad \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{s} \quad -19$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{27}} : \sqrt[3]{9} \quad -22 \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{6}} : \sqrt[3]{6} \quad -21$$

$$\frac{1}{r}\sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{18} \quad -24 \quad \sqrt[3]{9a^3} : \sqrt[3]{ac^3} \quad -23$$

$$6\sqrt[3]{a} : (-\sqrt[3]{2a}) \quad -26 \quad \sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{x} \quad -25$$

$$(2\sqrt{3r} + 2\sqrt{r} + \sqrt[3]{r}) : \sqrt[3]{r} \quad -27$$

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{r}) : \sqrt[3]{r} \quad -28$$

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{r}) : 2\sqrt[3]{r} \quad -29$$

$$\left( 2\sqrt[10]{\sqrt[3]{\frac{1}{v}}} + 2\sqrt[10]{\sqrt[3]{\frac{1}{v}}} + 2\sqrt[10]{\sqrt[3]{\frac{1}{v}}} \right) : \sqrt[10]{\sqrt[3]{\frac{1}{v}}} \quad -30$$

-۷۸-

مثال :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{r}} &= \frac{\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{r}} = \frac{\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{r}} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r})(\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r})}{(\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{r})(\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r})} \\ &= (\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r})(\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r}) \end{aligned}$$

تمرین

حاصل عبارات زیر را مبین کنید :

$$\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} \quad -1 \quad \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{6} \quad -2$$

$$\frac{1}{r}\sqrt[3]{2x} \times \sqrt[3]{18x} \quad -3 \quad \sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{32} \quad -4$$

$$\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{r} \quad -5 \quad \sqrt[3]{r} \times \sqrt[3]{r} \quad -6$$

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{6} \quad -7$$

$$\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^3} \quad a > 0 \quad -8$$

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \quad a > 0 \quad -9$$

$$\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^3} \quad a > 0 \quad -10$$

$$\sqrt[3]{xy^3} \times \sqrt[3]{x^3y} \quad x > 0 \text{ و } y > 0 \quad -11$$

حاصل عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید :

$$6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{2}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{5}\sqrt{2} \quad -50$$

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad -51$$

$$\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{9} \quad -52$$

$$\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{108} \quad -53$$

$$2\sqrt{8} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} \quad -54$$

$$3\sqrt{20} - 4\sqrt{245} - 2\sqrt{125} + 4\sqrt{180} \quad -55$$

$$4\sqrt{2} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28} \quad -56$$

$$8\sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{2}{15}} \quad -57$$

$$\sqrt{4\Delta c^2} - \sqrt{\Delta c^2} + \sqrt{\Delta a^2 c} \quad -58$$

$$\sqrt{18a^2b^2} + \sqrt{\Delta a^2 b^2} \quad -59$$

$$\sqrt{4a^2b^2} - \Delta a^2b^2 \quad -60$$

$$\sqrt{18a^2b^2c^2} + 9a^2b^2c^2 \quad -61$$

$$\sqrt{3a^2c} + 9abc + 3b^2c \quad -62$$

$$\sqrt{\frac{a^2c}{b^2}} + \sqrt{\frac{a^2c^2}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2c^2d^2}{bc^2}} \quad -63$$

$$\sqrt{\frac{m-n}{n^2}} + \sqrt{\frac{m}{n^2} - \frac{1}{n}} \quad -64$$

$$\sqrt{9x+27} + 3\sqrt{4x+12} \quad -65$$

$$5\sqrt{29} - \sqrt{56} \quad -66$$

$$\sqrt{x^2y} + \sqrt{y^2} - \sqrt{y(x-y)^2} \quad -67$$

$$(\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{b^2})(\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{b^2}) \quad -31$$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{a^2}}} \times \sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{a^2}}} \quad -32$$

حاصل توانها و ریشه های زیر را تعیین کنید:

$$(a\sqrt{r})^2 \quad -33 \quad (2\sqrt{a})^2 \quad -33$$

$$(\sqrt[5]{a^2x})^2 \quad -34 \quad (\sqrt[5]{x^2 - y^2})^2 \quad -35$$

$$\sqrt[5]{9\sqrt{2}} \quad -36 \quad \sqrt[5]{\Delta\sqrt{27}} \quad -37$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{9r}\sqrt{2}} \quad -38 \quad \sqrt[5]{a^2\sqrt{b}} \quad -39$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{5}x\sqrt{\frac{x}{r}}} \quad -40 \quad \sqrt[5]{\frac{r}{\sqrt{8a^2r}}} \quad -41$$

$$(\sqrt[5]{\frac{5}{\sqrt{8a^2r}}})^5 \quad -42 \quad \sqrt[5]{\frac{r}{\sqrt[5]{2}}} \quad -43$$

$$\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt[5]{a}}} \quad -44 \quad \sqrt[5]{\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[5]{ab}}} \quad -45$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{x}}} \quad -46 \quad \sqrt[5]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad -47$$

$$\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x}}} \quad -48 \quad \sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x}}} \quad -49$$

$$\sqrt{(a^r - b^r)(a+b)} - \sqrt{ra^r - ra^r b} + \sqrt{(a-b)^r} \quad -۶۸$$

رادیکالهای زیر را به يك فرجه تبدیل کنید :

$$\sqrt[4]{xy^r} \text{ و } \sqrt[6]{rx^r y^r} \quad -۶۹$$

$$\sqrt[n]{(a-b)^p} \text{ و } \sqrt[m]{(a^r + x^r)^r} \quad -۷۰$$

$$\sqrt{a} \text{ و } \sqrt[3]{b} \text{ و } \sqrt[4]{ax} \text{ و } \sqrt[5]{a-x} \quad -۷۱$$

اعمال زیر را انجام دهید :

$$\sqrt[3]{\Delta a^r(a+b)^r} - ra^r b \sqrt[3]{\Delta a^r(a+b)} \quad -۷۲$$

$$\sqrt[5]{r^2 a^r + 9^r x} + \sqrt[5]{a^r + 3a^r x} + \sqrt[5]{a^r x^2 + 3x^r} \quad -۷۳$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^r c - a^r b}{c^r}} - \sqrt[3]{\frac{a^r c - a^r b}{c^r}} \quad -۷۴$$

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید :

$$\frac{r}{r\sqrt{r}} \quad -۷۵ \quad \frac{r - \sqrt{r}}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{\sqrt{10} - r}{r\sqrt{r}} \quad -۷۸ \quad \frac{a+b}{a\sqrt{b}} \quad -۷۷$$

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt[3]{r}} \quad -۸۰ \quad \frac{r}{r + \sqrt{r}} \quad -۷۹$$

$$\frac{r}{\sqrt{r} - r} \quad -۸۲ \quad \frac{1 + \sqrt{r}}{1 - \sqrt{r}} \quad -۸۱$$

$$\frac{1}{r(\sqrt{r} - \sqrt{r})} \quad -۸۳ \quad \frac{r\sqrt{r} - \Delta}{\sqrt{r} - \Delta} \quad -۸۴$$

$$\frac{\sqrt{10} + r\sqrt{r}}{\sqrt{10} + \sqrt{r}} \quad -۸۶ \quad \frac{\sqrt{b+1} + 1}{\sqrt{b+1} - 1} \quad -۸۵$$

$$\frac{1}{\sqrt{r} + \sqrt{r} - \Delta} \quad -۸۸ \quad \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r} - \sqrt{r} + \sqrt{r}} \quad -۸۷$$

$$\frac{10^r + 12\sqrt{11}}{r - r\sqrt{11} + 12\sqrt{r}} \quad -۹۰ \quad \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \quad -۸۹$$

$$\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} \quad \text{و} \quad \frac{a - \sqrt{-b}}{a + \sqrt{-b}} \quad -۹۱$$

$$\frac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}} \quad -۹۲$$

حاصل توانهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

$$r^{\frac{1}{r}} \quad -۹۳ \quad r^{\frac{1}{r}} \quad -۹۴$$

$$10(x)^{\Delta} \quad -۹۶ \quad (10x)^{\Delta} \quad -۹۵$$

$$r^{\frac{r}{r}} \quad -۹۸ \quad a^{-r} \quad -۹۷$$

$$y^{-r} \quad -۱۰۰ \quad (xy)^{-r} \quad -۹۹$$

$$(a+b)^{-\frac{r}{r}} \cdot (a+b)^{\frac{r}{r}} \quad -۱۰۲ \quad a^{-r} : b^{-r} \quad -۱۰۱$$

$$\Delta x^{-1} \quad -۱۰۴ \quad r^{\frac{1}{r}} \quad -۱۰۳$$

$$(c^r + d^r)^{-\frac{1}{r}} \cdot (c^r + d^r)^{\frac{1}{r}} \quad -۱۰۶ \quad \left(\frac{1}{r}\right)^{-r} \quad -۱۰۵$$

۱۲۲- حاصل  $x^2 + 3x + 2$  را به ازای :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x = (\sqrt{2} - 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ حساب کنید.}$$

۱۲۳- به ازای  $x = a^{-1} \cdot \left(\frac{2a}{b} - 2\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$  حاصل :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 - ax)(1 + ax)^{-1} \times (1 + bx)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - bx)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ را حساب کنید.}$$

۱۲۴- به ازای  $x = 2a^{-1} \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]$  حاصل عبارت :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [x + (1 + x^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}]^{-1} \quad 2a(1 + x^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ را حساب کنید.}$$

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید :

$$\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - 1} \quad -125$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} \quad -127$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad -129$$

$$\frac{a}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad -131$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad -133$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \quad -108 \quad \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad -107$$

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad -110 \quad (-27)^{\frac{2}{\sqrt{2}}} \quad -109$$

$$\left(\frac{27}{24}\right)^{0/25} \quad -112 \quad \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{2}{\sqrt{2}}} \quad -111$$

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{-0/5} + \frac{5}{2} - 2^{\frac{2}{\sqrt{2}}} \quad -113$$

به فرض آنکه حروف زیر حقیقی و مثبت باشند ، حاصل عبارات زیر را تعیین کنید :

$$\frac{c^{-1}}{d} + \frac{d^{-1}}{c} \quad -114 \quad a^{-1}b + ab^{-1} \quad -115$$

$$\frac{2a^{-2}xy^{-1}}{2ax^{-1}y^2} \quad -117 \quad b^{\frac{2}{\sqrt{2}}}a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.b^{\frac{2}{\sqrt{2}}}a^{\frac{2}{\sqrt{2}}} \quad -116$$

$$\frac{\Delta x^0 + (\Delta a)^0}{2(x+a)^0} \quad -119 \quad \frac{(ab^2)^{\frac{2}{\sqrt{2}}} \cdot c^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{(bc^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a^{\frac{2}{\sqrt{2}}}} \quad -118$$

$$\frac{[x^2(x+y)^2]^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{x(x+y)} \quad -120$$

$$\frac{1+y(1+y)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{y+(1+y)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}} \quad -121$$

مجهول باشد و چنانچه معادله دارای دو یاسه یا ... حرف مجهول باشد، معادله را دو یا سه یا ... مجهولی می گویند .

### در معادلات حرفی ، غیر از مجهول اصلی ، حروف دیگری

هم وجود دارد که در این معادلات ، این حروف مانند اعداد معلومند و آنها را ضرایب حرفی یا پارامتر می نامند . مثلاً ضرایب معادله  $x^2 - 3x = 2$  که اعداد ۳ و ۱- و ۲ می باشد عددی است و در معادله  $x^2 = (2m-1)x + 1$  که بعضی ضرایب آن شامل پارامتر  $m$  است، می گویند ضرایب آن پارامتری است .

۳- حل معادلات - در حل معادلات ، عملیات زیر ، چنانچه لازم باشد ، بترتیب انجام می شود :

الف- اتحادها را بسط می دهیم .

ب- ضریبها را انجام می دهیم .

ج- مخرجها را حذف می کنیم .

د- جمله های مجهول را به طرف اول و مقادیر معلوم را به طرف دوم تساوی منتقل می کنیم .

ه- پس از اختصار ، مقدار معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم .

مثال ۱- مطلوب است حل معادله :

$$2(x+2)^2 - (2x+1)(x-2) = 0$$

$$2(x^2 + 4x + 4) - (2x^2 - 6x + x - 2) = 0$$

$$2x^2 + 8x + 8 - 2x^2 + 6x - x + 2 = 0$$

### معادله درجه اول يك مجهولی

۱- هر تساوی را که شامل يك یا چند حرف ، موسوم به حرف یا حروف مجهول ، باشد فقط به ازای يك یا چند مقدار معین که به این حرف یا حروف مجهول نسبت داده شود حاصل دو طرف تساوی با هم مساوی شوند ، معادله می نامند .

مثلاً طرفین تساوی  $2x + 1 = 5$  فقط به ازای  $x = 2$  و طرفین تساوی  $x^2 + 8 = 6x$  فقط به ازای اعداد  $x = 4$  و  $x = 2$  با هم برابر می شوند ، پس هر يك از این دو تساوی ، يك معادله است .

مقصود از حل يك معادله تعیین مقدار یا مقادیر حرف مجهول است ، بطوری که اگر آن مقدار یا مقادیر را در معادله به جای حرف مجهول قرار دهیم صدق کنند، یعنی نتیجه محاسبه دوطرف تساوی با هم برابر شوند . مقدار یا مقداری که در معادله صدق می کند ، ریشه ، یا ریشه های معادله نامیده می شوند .

معادله را يك مجهولی می گویند وقتی که فقط شامل يك حرف

اگر طرفین را بر عامل  $(x-4)$  تقسیم کنیم، يك جواب  $x=4$  از بین می‌رود.

**تبصره ۴-** در حل معادلات کسری، یعنی معادلاتی که در مخرج حرف مجهول دارند، در صورت امکان، کسرها را ساده و همه را به يك طرف معادله منتقل می‌کنیم.

پس از تعیین کوچکترین مخرج مشترك و حذف مخرجهای، جواب معادله را مانند (مثال ۲) بدست می‌آوریم.

**مثال -** مطلوب است حل معادله:

$$\frac{x-3}{x^2+2x} - \frac{x+3}{4-x^2} - \frac{2x}{x^2-4} = 0$$

**حل:**

پس از تجزیه مخرجهای، کوچکترین مخرج مشترك عبارت است از  $x(x+2)(x-2)$ . و چون کسر برابر صفر می‌شود، در نتیجه صورت کسر صفر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x(x+2)} - \frac{x+3}{(2-x)(2+x)} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} &= 0 \\ \frac{x-3}{x(x+2)} + \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} &= 0 \\ (x-3)(x-2) + (x+3)x - 2x^2 &= 0 \\ -2x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x=3$$

**۴-** معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$13x+11=0$$

$$13x=-11$$

$$x=-\frac{11}{13}$$

**مثال ۴-** مطلوب است حل معادله:

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} - \frac{2x-3}{4} = x-7$$

**حل:**

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} - \frac{2x-3}{4} - \frac{x-7}{1} = 0$$

مخرج مشترك ۱۲ است:

$$6x + 4(x+1) - 3(2x-3) - 12(x-7) = 0$$

$$-8x + 97 = 0$$

$$-8x = -97$$

$$x = \frac{97}{8}$$

**تبصره ۱-** می‌توان طرفین تساوی را فقط بر عاملی که مخالف

صفر باشد، تقسیم کرد. مثلاً در معادله:

$$(2x-1)(x^2+4) = (x-3)(x^2+4)$$

می‌توان طرفین را بر  $x^2+4$  که همواره مثبت و مخالف صفر است

تقسیم کرد. ولی در معادله:

$$(x-4)(4x-5) = (2x-7)(x-4)$$



$$\frac{\Delta x}{v} = 10 \left( \frac{x}{16} + 1 \right)$$

$$\frac{\Delta x}{v} = \frac{\Delta x}{v} + 10$$

$$\Delta x - \Delta x = 10$$

$$x(5-5) = 10$$

$$0 \times x = 10$$

چون هر عددی در در صفر ضرب کنیم حاصل صفر خواهد شد، پس معادله مفروض هیچوقت دارای جواب نیست، یعنی نمی توان مقدار  $x$  را طوری تعیین کرد که در معادله صدق کند. در چنین حالتی معادله را **ممتنع** می گویند (و در این حال چون جواب معادله به صورت يك عدد تقسیم بر صفر می شود و می دانیم که هر عدد تقسیم بر صفر برابر بینهایت است می گویند جواب معادله  $\infty$  است).

۴ - اکنون معادله زیر را حل می کنیم:

$$3(9+8x) - 27 = 24x$$

$$27 + 24x - 27 - 24x = 0$$

$$24x - 24x = 0$$

$$x(24 - 24) = 0$$

$$0 \times x = 0$$

در این معادله به جای  $x$  هر عددی قرار دهیم صدق می کند. پس جمیع اعداد می توانند جواب معادله باشند، یعنی معادله دارای بینهایت جواب است؛ در این حالت معادله را **مهم** می گویند (معادله جوابهای بیشمار دارد).

**نتیجه** - هر معادله يك مجهولی درجه اول، پس از اختصار به صورت کلی  $ax + b = 0$  تبدیل می شود. چنانچه  $a \neq 0$  باشد، معادله همواره دارای جواب است (خواه  $b$  صفر یا مخالف آن باشد) و جواب معادله  $x = -\frac{b}{a}$  است. هر گاه فقط  $a = 0$  و  $b \neq 0$  باشد، معادله **ممتنع** است. چنانچه  $a = b = 0$  باشد، معادله **مهم** است.

**مثال ۱ -**  $m$  را بطریقی تعیین کنید که معادله زیر ممتنع شود:

$$(m-1)x - 8m - 5 = 0$$

**حل :**

$$(m-1)x = 8m + 5$$

وقتی این معادله ممتنع خواهد شد که  $m-1=0$  یا  $m=1$  باشد.

**مثال ۲ -** معادله  $\frac{x-m}{m+3} = \frac{2-3x}{5}$  را حل و بحث کنید.

مقصود از حل و بحث معادله حرفی این است که ببینیم معادله مفروض به ازای چه مقادیری از حرف مورد نظر دارای جواب است و در چه صورت معادله مهم یا ممتنع می شود.

قبل از حل می دانیم  $m+3 \neq 0$  است زیرا در غیر این صورت کسر طرف اول معادله بینهایت می شود.

$$10(m+3) - 5(x-m) = (2-3x)(m+3)$$

$$10m + 30 - 5x + 5m = 2m + 6 - 3mx - 9x$$

$$4x + 3mx = -24 - 13m$$

$$x(4+3m) = -24 - 13m$$

اگر  $3m + 4 \neq 0$  باشد معادله دارای جواب  $x = -\frac{24 + 13m}{4 + 3m}$  است.

هرگاه  $3m + 4 = 0$  یا  $m = -\frac{4}{3}$  باشد، معادله ممنوع است و جواب نخواهیم داشت. این معادله هیچوقت مبهم نیست (چرا؟).

**مثال ۳ -** معادله  $m^2x - m^2 + mx - 3m - 2x - 2 = 0$  را حل و بحث کنید.

پس از عملیات لازم، نتیجه می شود:

$$(m+2)(m-1)x = (m+2)(m+1)$$

اگر  $(m+2)(m-1) \neq 0$  باشد یعنی  $m \neq -2$  و  $m \neq 1$  باشد، معادله دارای جواب  $x = \frac{m+1}{m-1}$  است.

به ازای  $m = 1$  معادله ممنوع و به ازای  $m = -2$  معادله مبهم است.

### حل معادلات اصم قابل تبدیل به معادلات درجه اول

**۵ -** هر معادله که حرف مجهولش زیر رادیکال باشد، آن را معادله اصم می گویند. مانند:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \text{ و } \sqrt{x-3} = 0$$

معادلاتی نظیر  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 4$  اصم نیستند، زیرا می توان آن را به صورت  $\sqrt{(x-1)^2} = 4$  نوشت؛ در صورتی که  $x - 1 > 0$  باشد، خواهیم داشت  $x - 1 = 4$  و چنانچه  $x - 1 < 0$  باشد خواهیم داشت  $4 = -(x-1)$  که هیچکدام اصم نیستند.

### ۶ - حل معادلات اصم:

**الف -** چنانچه صورت کلی معادله اصم  $\sqrt{A} = B$  باشد (A و B نمایش کثیرال جمله هایی بر حسب x هستند). طرفین معادله را مربع می کنیم تا رادیکال حذف شود. وقتی که طرفین تساوی را به توان زوج می رسانیم، احتمالاً جواب خارجی پیدا می شود. زیرا مربع  $\sqrt{A} = B$  و  $\sqrt{A} = -B$  هر دو یکی است. به این جهت بعد از محاسبه باید جوابها را امتحان کرد و جواب خارجی را از جواب معادله تمیز داد.

**مثال ۱ -** مطلوب است حل معادله:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} &= 2 \\ x-3 &= 2^2 \\ x-3 &= 4 \\ x &= 7\end{aligned}$$

چنانچه عدد ۷ را در معادله به جای x قرار دهیم می بینیم طرفین معادله باهم برابر می شوند، یعنی عدد ۷ در معادله صدق می کند. پس ۷ ریشه معادله است.

**مثال ۲ -** مطلوب است حل معادله:

-۹۴-

$$\sqrt{2x^2-4}=x$$

$$2x^2-4=x^2$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

می بینیم  $x=2$  در معادله صدق می کند ولی اگر  $x=-2$  را در معادله بگذاریم دو طرف معادله با هم برابر نمی شوند . پس جواب معادله فقط  $x=2$  است .

مثال ۳ - مطلوب است حل معادله :

$$\sqrt{x^2+3}-5=x$$

$$\sqrt{x^2+3}=x+5$$

$$x^2+3=(x+5)^2$$

$$x^2+3=x^2+10x+25$$

$$10x=-22$$

$$x=-22/10$$

مثال ۴ - مطلوب است حل معادله :

$$\sqrt{x+1}=2$$

طرفین تساوی را به توان فرجه رادیکال می رسانیم :

$$x+1=2^2$$

$$x+1=4$$

$$x=3$$

-۹۵-

ب - هرگاه معادله به صورت :  $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$  باشد ، اعم از اینکه C مساوی یا مخالف صفر باشد ، یکی از رادیکالها را به طرف دیگر منتقل و طرفین تساوی را مربع می کنیم ، لااقل یکی از رادیکالها حذف می شود . سپس مانند حالات قبل معادله را می توان حل کرد .

مثال ۱ - مطلوب است حل معادله :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} = 3$$

$$\sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{x-3}$$

$$x+1 = (3 - \sqrt{x-3})^2$$

$$x+1 = 9 + x - 3 - 6\sqrt{x-3}$$

$$6\sqrt{x-3} = 5$$

$$x = \frac{133}{36}$$

مثال ۲ - مطلوب است حل معادله :

$$2\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3x+1} = 0$$

$$2\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3x+1}$$

$$16(2x-1) = 9(3x+1)$$

$$32x - 16 = 27x + 9$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

ج - هرگاه معادله به صورت  $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} \pm D = 0$

باشد (D صفر یا مخالف صفر)، در هر حال با حفظ دو رادیکال در يك طرف و نقل بقیه به طرف دیگر تساوی، طرفین معادله حاصل را مربع می‌کنیم و این عمل را هر چند بار که مورد لزوم باشد تکرار می‌کنیم تا جواب معادله بدست آید.

## مثال ۹ -

$$\sqrt{x+17} - \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-7} = 0$$

$$\sqrt{x+17} - \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-7}$$

$$(\sqrt{x+17} - \sqrt{x+1})^2 = (2\sqrt{x-7})^2$$

$$x+17+x+1-2\sqrt{(x+17)(x+1)} = 4(x-7)$$

$$23-x = \sqrt{(x+17)(x+1)}$$

$$(23-x)^2 = (\sqrt{(x+17)(x+1)})^2$$

$$529 - 46x + x^2 = x^2 + 18x + 17$$

$$64x = 512$$

$$x = 8$$

مثال ۴ - مطلوب است حل معادله:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+5} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$$

طرفین معادله را مربع می‌کنیم:

$$x+7+x+5-2\sqrt{(x+7)(x+5)} =$$

$$x+3+x+2-2\sqrt{(x+3)(x+2)}$$

و پس اذاتصار:

$$7-2\sqrt{x^2+12x+35} = -2\sqrt{x^2+5x+6}$$

$$49+4(x^2+12x+35)-28\sqrt{x^2+12x+35} = 4(x^2+5x+6)$$

پس از ساده کردن نتیجه می‌شود:

$$28x+165=28\sqrt{x^2+12x+35}$$

طرفین را مجذور می‌کنیم.

$$784x^2+2772x+2540=784(x^2+12x+35)$$

$$168x = -215$$

$$x = -\frac{215}{168}$$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید:

$$18x+4=34x-13 \quad -1$$

$$7(x-8)=2(x-14) \quad -2$$

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11 \quad -3$$

$$x+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}-\frac{5x}{6}=\frac{53}{60} \quad -4$$

$$\frac{7x}{5}-\frac{x}{5}=\frac{1}{2} \quad -5$$

$$\frac{7x-3}{4}-\frac{3x-1}{8}=\frac{x-2}{2} \quad -6$$

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2x^2-6x+5}{x^2-x-10} \quad -۲۰$$

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \quad -۲۲ \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{2} = \frac{x}{2} \quad -۲۱$$

$$\frac{2+2x}{2x^2-2} - \frac{x-2}{2x^2+2x+2} + \frac{x+2}{2-2x^2} = 0 \quad -۲۳$$

$$\frac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)} + \frac{x-b^2-c^2}{(c-a-b)(b-a-c)} = 1 \quad -۲۴$$

$$\frac{x}{a^{m-1}b^m} - \frac{x}{a^mb^{m-1}} = \frac{1}{b^m} - \frac{1}{a^m} \quad -۲۵$$

$$\frac{ax^{m+1}-x^m}{x-1} + \frac{bx^m}{x+1} = \frac{ax^m(x^2+1)}{x^2-1} \quad -۲۶$$

معادلات زیر را حل و بحث کنید :

$$(a-1)x+ab-2=0 \quad -۲۷$$

$$(a+b-2)x+a-b-2=0 \quad -۲۸$$

$$\frac{ax+2}{2x+2}=b \quad -۲۰ \quad \frac{x+a}{2x+2}=b \quad -۲۹$$

$$(a-x)(b-x)=(a-x)(a-b)-(a+x)(b-x) \quad -۳۱$$

$$a(x-b)=b(a-x)-(a+b)x \quad -۳۲$$

$$\frac{a^2x+1}{a+1}=a^2-a+1 \quad -۳۳$$

$$\frac{x+a}{a} - \frac{x-2a}{b} = 2 \quad -۳۴$$

$$\frac{2(\delta-2x)}{\delta x} = \frac{\delta x-2}{1\delta} - \frac{x+2}{2} \quad -۷$$

$$\frac{10x+2}{2} - \frac{2x-1}{5} = x + \frac{22}{10} \quad -۸$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad -۹$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-2} = \frac{2}{(x-2)(x-2)} \quad -۱۰$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{2(x-2)} \quad -۱۱$$

$$(2x-2)^2(2x+2) = 22x^2 \quad -۱۲$$

$$(x+1)(x-2)+(x+1)(x-5)=2(x-5)\left(x+\frac{5}{2}\right) \quad -۱۳$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{2}{2}\right)=(x-5)(x+2)+\frac{22}{2} \quad -۱۴$$

$$\frac{2}{9}\left[12x-6-\delta\left(\frac{2x}{2}-1\delta\right)\right]+22(x-2)+\frac{2}{2}=0 \quad -۱۵$$

$$\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2}{x^2-4} \quad -۱۶$$

$$\frac{2a-1}{a-2} - \frac{a}{a+1} = 1 \quad -۱۷$$

$$\frac{2}{b+5} + \frac{20}{b^2-25} = \frac{2}{5-b} \quad -۱۸$$

$$\frac{2a-2}{2a-5} + \frac{2(12+2a^2)}{25-12a^2} = \frac{2a+1}{2a+5} \quad -۱۹$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad -52$$

$$x + \sqrt{x(x-a)} = b \quad -53$$

$$\frac{yx+a}{yx+b} + \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} = 0 \quad -54$$

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = c \quad -55$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{2x+a} = 0 \quad -56$$

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{x} + \sqrt{x+b} \quad -57$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = a \quad -58$$

$$\frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1 \quad -59$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-6} + 2\sqrt{5} \quad -61$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-4} = 2 \quad -62$$

$$\sqrt{1-\sqrt{x^2-x^2}} = x-1 \quad -63$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1 \quad -64$$

$$\sqrt{\Delta x-2} + \sqrt{2x-2} = \sqrt{\Delta x+1} + \sqrt{2x-4} \quad -65$$

$$\frac{\Delta a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2(\sqrt{a^2+x^2} + x) \quad -66$$

$$x\sqrt{a^2+ab+b^2} = a\sqrt{x^2-b^2} + b\sqrt{x^2-a^2} \quad -67$$

$$\frac{x+a-b}{a} - \frac{x+b-a}{b} = \frac{b^2-a^2}{ab} \quad -25$$

$$\frac{x}{b-a} + \frac{x}{2a} = \frac{b-a}{2a} \quad -26$$

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1+ax \quad -27$$

$$\frac{a(\Delta x - 14a)}{4a^2 - x^2} = \frac{2a+x}{2a-x} + \frac{x-2a}{x+2a} \quad -28$$

$$\frac{2(a+x)}{a(2x-a)} - \frac{x-2a}{2x+2a} = \frac{2a(a+\Delta) - 2x^2}{2x^2+ax-2a^2} + \frac{1}{a} \quad -29$$

معادلات اسم زیر را حل کنید :

$$\sqrt{x^2+2} = x-5 \quad -30$$

$$\sqrt{x^2-2x-1} + 2 = x \quad -31$$

$$x - \sqrt{x^2-2x+2} = 2 \quad -32$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x} = 2 \quad -33$$

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x+24} \quad -34$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-2x}{1+2x} \quad -35$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1 \quad -36$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} + 1 = 5 \quad -37$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+1} \quad -38$$

$$\sqrt{x+12} + \sqrt{x-4} = 2 \quad -39$$

$$\Delta\sqrt{2x-1} = 9 + \sqrt{4x-4} \quad -40$$

$$\sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+\Delta} = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+2} = 0 \quad -41$$

$$\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-2b}=2 \quad -98$$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}=mx \quad -99$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} \quad -100$$

$$\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a \quad -101$$

$$x=\sqrt{b-x}\times\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\times\sqrt{a-x}+ \\ \sqrt{a-x}\times\sqrt{b-x} \quad -102$$

$$2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}} \quad -103$$

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=a \quad -104$$

$$\frac{2+x}{\sqrt{r}+\sqrt{2+x}}+\frac{2-x}{\sqrt{r}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{r} \quad -105$$

## فصل چهارم

### نامساویها

۱ - دو عدد جبری مختلف (نامساوی)  $a$  و  $b$  را در نظر می گیریم. هرگاه تفاضل  $a - b$ ، مثبت باشد می گویند عدد  $a$  از عدد  $b$  بزرگتر است و این معنی را به صورت  $a > b$  می نویسند. به عکس، وقتی که تفاضل  $a - b$ ، منفی باشد می گویند  $a$  از  $b$  کوچکتر است و این معنی را به صورت  $a < b$  می نویسند.

هر يك از صورتهای  $a > b$  و  $a < b$  را يك نامساوی و  $a$  و  $b$  را طرفین نامساوی می نامند.

می دانیم که کلیه اعداد مثبت از صفر بزرگترند و هر عدد مثبت از هر عدد منفی نیز بزرگتر است. بین دو عدد مثبت، آن که قدر مطلق بیشتر دارد بزرگتر است. جمیع اعداد منفی از صفر کوچکترند و بین دو عدد منفی آن که قدر مطلق بیشتر دارد، کوچکتر است.

### خواص اصلی نامساویها

۲ - قضیه - هرگاه بر طرفین نامساوی عددی اضافه کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند.



بنا به فرض  $a > b$  . می‌خواهیم ثابت کنیم که  $a + c > b + c$  .

از نامساوی  $a > b$  معلوم می‌شود که  $a - b$  عددی است مثبت؛

چنانچه به این عبارت ، عدد  $c$  اضافه و کم کنیم ، مقدار عبارت تغییری نمی‌کند . یعنی  $a - b + c - c$  یا  $(a + c) - (b + c)$  باز هم مثبت

است؛ پس:  $a + c > b + c$  .

به همین طریق می‌توان ثابت کرد که اگر از طرفین نامساوی

مقداری کم کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند .

**نتیجه** - اگر جمله‌ای را از یک طرف نامساوی به طرف دیگر

منتقل کنیم ، علامت آن جمله عوض می‌شود: زیرا اگر از طرفین

نامساوی  $a > b + c$  مقدار  $c$  را کم کنیم، بنا به قضیه قبل چنین خواهیم

داشت :

$$a - c > b + c - c$$

$$a - c > b$$

یا

**۳ - قضیه** - چند نامساوی متحدالجهت را با حفظ جهت

می‌توان جمع کرد .

اگر نامساویهای  $a > b$  و  $a' > b'$  مفروض باشند،  $a - b$  و  $a' - b'$

مثبتند و مجموع آنها نیز عددی است مثبت. یعنی

$$a - b + a' - b' > 0$$

$$a + a' > b + b'$$

یا

**۴ - قضیه** - هر سه طرفین نامساوی را در عددی مثبت ضرب

کنیم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

فرض می‌کنیم  $a < b$  و  $m$  عددی مثبت باشد .

از نامساوی  $a < b$  نتیجه می‌گیریم که  $(a - b)$  عددی است

منفی؛ پس اگر عدد منفی  $(a - b)$  را در عدد مثبت  $m$  ضرب کنیم

حاصل ضرب یعنی  $(am - bm)$  منفی خواهد بود و از اینجا معلوم

می‌شود:  $am < bm$  .

**۵ - قضیه** - هر سه طرفین نامساوی را در عددی منفی

ضرب کنیم جهت نامساوی تغییر می‌کند .

فرض می‌کنیم  $a > b$  و  $m$  عددی منفی باشد .

از نامساوی  $a > b$  نتیجه می‌شود که  $a - b$  عددی مثبت است.

چنانچه این عبارت را در عدد منفی  $m$  ضرب کنیم ، حاصل ضرب یعنی

$(am - bm)$  منفی خواهد شد. پس  $am < bm$  .

**۶ - قضیه** - هر سه طرفین نامساوی را بر عددی مثبت تقسیم

کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند و چنانچه طرفین نامساوی را

بر عددی منفی تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود.

اگر طرفین نامساوی  $a > b$  را در عدد مثبت  $\frac{1}{m}$  ضرب کنیم

چنین خواهیم داشت :

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

و چنانچه طرفین نامساوی را در عدد منفی  $\frac{1}{m}$  ضرب کنیم

نتیجه می شود :

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$$

و در هر دو حال، حکم ثابت است.

نتیجه - علامتهای طرفین نامساوی را می توان تغییر داد به شرط آنکه جهت نامساوی را عوض نکنیم .

۷ - قضیه - هرگاه طرفین نامساوی را به توان فرد برسانیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند .

هر عدد فرد را می توان به صورت  $2k+1$  نوشت. چنانچه  $a < b$  فرض شود، باید ثابت کنیم :  $a^{2k+1} < b^{2k+1}$  .

الف - اگر  $a$  و  $b$  مقادیری مثبت باشند حکم ثابت است.

ب - اگر  $a$  و  $b$  هر دو مقادیری منفی باشند واضح است که قدر مطلق  $a$  از قدر مطلق  $b$  بیشتر است :  $|a| > |b|$  . بنا به حالت قبل :

$$|a|^{2k+1} > |b|^{2k+1}$$

$$|a^{2k+1}| > |b^{2k+1}|$$

و یا

می دانیم هر عدد منفی وقتی که به توان فرد برسد حاصل آن منفی خواهد بود. و از دو عدد منفی، آن که قدر مطلق بیشتری دارد کوچکتر از دیگری است؛ پس :

$$a^{2k+1} < b^{2k+1}$$

ج - هر گاه  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه باشند از نامساوی  $a < b$

معلوم می شود که  $a$  عددی است منفی و  $b$  مثبت است و توان  $(2k+1)$  را

عدد منفی  $a$ ، منفی خواهد شد. پس :  $a^{2k+1} < b^{2k+1}$  .

۸ - قضیه - اگر طرفین نامساوی را به توان زوج برسانیم :

الف - چنانچه طرفین نامساوی مقادیر مثبت باشند، جهت نامساوی

تغییر نمی کند .

ب - چنانچه طرفین نامساوی مقادیر منفی باشند، جهت نامساوی

عوض می شود .

ج - چنانچه طرفین نامساوی مختلف‌العلامه باشند، گاهی جهت

نامساوی تغییر می کند و گاهی عوض نمی شود و گاهی نامساوی، به تساوی

تبدیل می شود. اثبات آنها مانند اثبات قضیه قبل است .

### نامعادله يك مجهولی درجه اول

۹ - هر دو عبارت جبری را که اقلاً یکی از آنها شامل يك یا

چند حرف مجهول باشد و به وسیله علامت  $>$  یا  $<$  جدا شده باشند ،

نامعادله گویند .

نامعادله ای که فقط يك حرف مجهول داشته باشد نامعادله يك

مجهولی نامیده می شود.

مانند:  $x > 1 - x$  یا  $3x - 1 < 4 - 2x$

چنانچه با نقل تمام جمله‌های نامعادله يك مجهولی به يك طرف و انجام اختصارات ممکن، بزرگترین توان حرف مجهول برابر واحد باشد، نامعادله را يك مجهولی درجه اول، گویند صورت کلی نامعادلات يك مجهولی درجه اول چنین است.

$$ax + b > 0 \text{ یا } ax + b < 0$$

(a ضریب جمله درجه اول و b جمله ای است، مستقل از x). هر عدد جبری را که در نامعادله يك مجهولی جانشین حرف مجهول شود و نامعادله را به يك نامساوی محقق تبدیل کند، جواب نامعادله يك مجهولی می نامند.

**جواب نامعادله**، برخلاف معادلات، هیچوقت يك یا چند عدد مشخص نیست، بلکه مقادیری از حرف مجهول است که جمله‌گی در نامعادله صدق می کنند؛ در حقیقت در نامعادلات، حدی برای جوابها مشخص می شود؛ مثلاً در نامعادله:  $3x - 1 < 4 - 2x$  جمیع اعداد کوچکتر از يك مانند  $0/7$ ،  $0/8$  و صفر و  $-1$  و  $-2$  و ..... جواب نامعادله اند.

با استدلالی نظیر آنچه که در نامساویها گفته شد، می توان ثابت کرد که همان احکام، در نامعادلات نیز صادق است.

**مثال ۱** - مطلوب است حل نامعادله:  $0/2x + 1 > x - 3$

معلومات را به يك طرف و مجهولات را به طرف دیگر نامساوی منتقل و سپس نامساوی را ساده می کنیم:

$$3 - 1 > x - 2x$$

$$x > -4$$

یعنی جمیع اعداد بزرگتر از  $(-4)$  در نامعادله فوق صدق می کنند.

**مثال ۲** - مطلوب است حل نامعادله:  $2 + \frac{x}{4} > 12 - \frac{3x}{5}$ .  
برای حذف مخرج می توان طرفین نامساوی را در عدد مثبت ۱۰ (کوچکترین مخرج مشترك) ضرب کرد:

$$2x - 120 > 5x + 20$$

$$20 + 120 > 5x - 2x$$

$$x > 140$$

پس جمیع اعداد بزرگتر از ۱۴۰ جواب نامعادله اند.

**مثال ۳** - مطلوب است حل نامعادله:  $2(x+1) < 5x - 6$

$$2x + 2 < 5x - 6$$

$$-6 - 2x < -6 - 3x$$

$$-9 < -x$$

اگر طرفین نامساوی را بر  $-2$  تقسیم کنیم، جهت نامساوی

توضیح می‌شود و در نتیجه چنین خواهیم داشت:  $x > 4/5$

### ۱۰ - حل دستگاه نامعادلات يك مجهولی درجه اول :

مقصود از حل دستگاه نامعادلات، تعیین حدود مجهول است بطوری که در هر يك از نامعادلات دستگاه صدق کند.

برای تعیین جواب دستگاه نامعادلات، هر يك از آنها را جداگانه حل کرده و جوابها را بدست می‌آوریم. از مقایسه جوابها، جواب دستگاه بدست می‌آید.

مثال ۱ - مطلوب است حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 5x - 6 < 3x - 14 & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x+6}{2} < x+13 & (II) \end{cases}$$

از نامعادله (I) نتیجه می‌شود:  $x < -4$  و از نامعادله (II) خواهیم

داشت:  $x < 4$ . طبق جدول زیر، از مقایسه جوابهای نامعادلات، جوابهای دستگاه معین می‌شود:

	-4	0	+4
	جواب نامعادله (I)		جواب نامعادله (II)

پس جواب دستگاه، جوابی است که در هر دو نامعادله (I) و

(II) صدق می‌کند، یعنی  $x < -4$  جواب دستگاه است.

مثال ۲ - مطلوب است حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x - 5 < x + 3 & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 < 3x - 9 & (II) \end{cases}$$

جواب نامعادله (I)،  $x < 8$  و جواب نامعادله (II)،  $x > 6$ :

	6	8
	جواب نامعادله (II)	
	جواب نامعادله (I)	

پس جواب دستگاه اعداد واقع بین ۶ و ۸ است که به صورت  $6 < x < 8$  نوشته می‌شود.

### تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول

۱۱ - هرگاه حاصل يك عبارت جبری پس از انجام عملیات لازم و اختصارات ممکن، شامل يك جمله از حرف مجهول با توان يك و يك جمله به صورت مقدار ثابت (یعنی عدد) باشد، آن حاصل دو جمله‌ای درجه اول نامیده می‌شود.

صورت کلی دو جمله‌ایهای درجه اول،  $ax + b$  است که در آن  $a$  همیشه مخالف صفر است ولی  $b$  می‌تواند مساوی صفر هم باشد. دو جمله‌ای  $x - 2$  را در نظر می‌گیریم. این دو جمله‌ای به ازای  $x = 2$  برابر صفر می‌شود.

عدد ۲ را ریشه دو جمله‌ای می‌گویند. چنانچه به  $x$  اعدادی بزرگتر از ۲ مانند ۳ و ۴ و ... و  $+\infty$  بدسیم، حاصل  $x - 2$  همیشه مثبت است. هرگاه به  $x$  اعدادی کوچکتر از ۲ مانند ۱ و ۰

و ۱-۲ و ۰ و ..... و  $-\infty$  بدیه حاصل ۲- $x$  همواره منفی است؛  
به عبارت دیگر، دوجمله‌ای ۲- $x$  به ازای مقادیری از  $x$  که بزرگتر از  
۲ (ریشه دوجمله‌ای) باشند همواره مثبت است و به ازای جمیع مقادیر  
 $x$  که کوچکتر از ۲ باشند منفی است.

۱۲- تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول  $ax+b$ :

در دو جمله‌ای  $ax+b$  ابتدا از فاکتور می‌گیریم:

$$ax+b=a(x+\frac{b}{a})$$

تساوی اخیر را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$(I) \quad ax+b=a[x-(-\frac{b}{a})]$$

اما  $-\frac{b}{a}$  ریشه دوجمله‌ای  $ax+b$  است؛ زیرا:

$$ax+b=0$$

$$ax=-b$$

$$x=-\frac{b}{a}$$

پس رابطه (I) چنین خواهد شد:

(II)

$$ax+b=a(x-\text{ریشه دوجمله‌ای})$$

در طرف دوم تساوی (II) ریشه دوجمله‌ای درجه اول عددی

است مشخص، ولی به  $x$  می‌توان مقادیر پیشمار، از  $(-\infty)$  تا  $(+\infty)$ ،

نسبت داد.

الف - اگر به  $x$  مقادیری بزرگتر از ریشه دوجمله‌ای بدیهیم،  
پراتز طرف دوم تساوی (II) مثبت می‌شود؛ در نتیجه دوجمله‌ای  
 $ax+b$  به ازای  $a>0$  مثبت و به ازای  $a<0$  منفی است.

پس: علامت دوجمله‌ای  $ax+b$  به ازای جمیع مقادیر  $x$ ،  
بزرگتر از ریشه دوجمله‌ای، موافق علامت  $a$  یعنی موافق علامت  
ضریب جمله درجه اول است.

ب - اگر به  $x$  مقادیری کوچکتر از ریشه دوجمله‌ای نسبت دهیم،  
پراتز نامبرده منفی خواهد شد؛ در نتیجه دوجمله‌ای  $ax+b$  به  
ازای  $a>0$  منفی و به ازای  $a<0$  مثبت می‌شود.

بنابراین: علامت دوجمله‌ای  $ax+b$  به ازای جمیع مقادیر  
 $x$ ، کوچکتر از ریشه دوجمله‌ای، مخالف علامت  $a$  است.

مثال ۱- علامت دوجمله‌ای  $2x-4$  را تعیین کنید.

ابتدا دوجمله‌ای را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه دوجمله‌ای  
بدست آید:

$$2x-4=0$$

$$2x=4 \quad \text{واز آنجا:}$$

$$x=2$$

پس به کمک جدول زیر، با توجه به نتایج بالا، علامت دوجمله‌ای  
را تعیین می‌کنیم:

$x$	$-\infty$	۲	$+\infty$
$2x-4$	- - - - -	۰	+ + + + +

دوجمله‌ای مفروض به ازای  $x > 2$  مثبت و به ازای  $x < 2$  منفی است.

**مثال ۲-** علامت عبارت  $-2x - 2$  را تعیین کنید.

عبارت مفروض دوجمله‌ای درجه اول ناقصی است که در آن مقدار

جمله دوم (مقدار ثابت) برابر صفر است.

ریشه این دوجمله‌ای  $x = 2$  است. پس مطابق نتایجی که قبلاً بدست

آمد، جدول زیر را خواهیم داشت:

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$-2x - 2$	$+$	$0$	$-$

به ازای تمام اعداد مثبت که به  $x$  نسبت داده شوند، دوجمله‌ای

مفروض منفی است، و به ازای تمام اعداد منفی که به  $x$  نسبت داده شوند،

دوجمله‌ای مفروض مثبت است.

**تبصره ۱-** اگر يك عبارت جبری به صورت حاصل ضرب

دو جمله‌ای درجه اول باشد یا آنکه بتوان آن را به چنین صورتی

در آورد، برای تعیین علامت این قبیل عبارت‌ها، کافی است ابتدا

علامت هر يك از عوامل ضرب را معین کنیم و سپس حاصل ضرب علامتها

را بدست آوریم.

**مثال -** علامت عبارت  $-2x^2 + x - 2$  را معین کنید.

$$-2x^2 + x - 2 = x(-2x - 2)$$

علامت هر يك از دو عامل  $x$  و  $(-2x - 2)$  را تعیین کرده و با

درج این علامتها در جدولی به ترتیب زیر، علامت حاصل ضرب

$x(-2x - 2)$  را که همان علامت عبارت مفروض است، از ضرب

علامتهاى نامبرده معین می‌کنیم:

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x$	$-$	$0$	$+$	$+$
$-2x - 2$	$+$	$+$	$+$	$-$
$-2x^2 + x - 2$	$-$	$0$	$+$	$-$

به ازای مقادیر  $x$  محصور بین  $\frac{1}{2}$  و  $0$  یا  $(0 < x < \frac{1}{2})$

عبارت:  $(-2x^2 + x - 2)$  مثبت است و به ازای  $x > \frac{1}{2}$  عبارت نامبرده

منفی است.

**تبصره ۲-** چون علامت هر کسر، از تقسیم علامت صورت کسر

بر علامت مخارج آن بدست می‌آید، در عبارات کسری باید علامت صورت

و مخارج را تعیین کرد تا بتوان علامت کسر را بدست آورد.

**مثال ۱-** علامت کسر  $\frac{2x-1}{2x+1}$  را بدست آورید.

صورت و مخارج کسر مفروض، هر کدام يك دو جمله‌ای درجه

اول هستند که با تعیین علامتهاى آنها و تقسیم علامتهاى تعیین شده

بریکدیگر، علامت کسر مفروض بدست خواهد آمد.

ریشه صورت  $x = \frac{1}{4}$  و ریشه مخرج  $x = -\frac{1}{4}$  است و با تنظیم

جدولی به ترتیب زیر، علامت کسر مفروض تعیین می‌شود:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$2x-1$	-----	-----	+++++	+++++
$2x+1$	-----	+++++	+++++	+++++
$\frac{2x-1}{2x+1}$	+++++	-----	+++++	+++++

به ازای:  $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$  کسر مفروض منفی است و به ازای:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x < -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ کسر نامبرده مثبت می‌شود.}$$

مثال ۳- علامت عبارت  $\frac{1-x}{1+x} + 1$  را تعیین کنید.

در عبارت مفروض، ابتدا کسر را با عدد جمع می‌کنیم، حاصل

می‌شود:  $\frac{2}{1+x}$ . چون صورت این کسر همواره مثبت است، پس

علامت کسر همان علامت دو جمله‌ای  $x+1$  است که به ازای  $x < -1$  منفی و به ازای  $x > -1$  مثبت است.

### ۱۳- حل نامعادلات کسری:

الف- ابتدا هر يك از کسرها را ساده می‌کنیم.

ب- پس از نقل تمام عبارتها به يك طرف، مخرج مشترك می‌گیریم.

ج- علامت کسر حاصل را با تنظیم جدولی معین می‌کنیم.

د- به کمک جدول نامبرده جواب نامعادله را مشخص می‌کنیم.

تبصره- در نامعادلات کسری، برای حذف مخرج نمی‌توان طرفین نامساوی را در عبارتی شامل حرف مجهول ضرب کرد، مگر آنکه آن عبارت به ازای جميع مقادیر حرف مجهول، مثبت باشد.

مثال ۱- مطلوب است حل نامعادله:

$$\frac{x-2}{x-2} - \frac{2x+1}{2x-2} > 1$$

$$\frac{x-2}{x-2} - \frac{2x+1}{2(x-2)} - 1 > 0$$

$$\frac{2(x-2) - (2x+1) - (2x-2)}{2(x-2)} > 0$$

$$\frac{-2x-3}{2(x-2)} > 0$$

برای تعیین علامت کسر اخیر، باید علامت صورت یعنی

$(-2x-3)$  و علامت مخرج یعنی  $2(x-2)$  یا فقط  $(x-2)$  را

تعیین کرد، تا علامت کسر بدست آید.

جدول زیر ، علامتهای صورت و مخرج کسر و در نتیجه علامت کس و جواب نامعادله را روشن می‌سازد :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	۲	$+\infty$
$-2x-3$	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$\frac{-2x-3}{2(x-2)}$	-	+	+	+

جواب نامعادله عبارت است از :  $-\frac{3}{2} < x < 2$

مثال ۴- مطلوب است حل نامعادله :  $\frac{x^2-x+9}{x^2+5x+6} > 1$

$$\frac{x^2-x+9}{x^2+5x+6} - 1 > 0$$

$$\frac{-6x+3}{x^2+5x+6} > 0$$

$$\frac{3(-2x+1)}{(x+3)(x+2)} > 0$$

علامت صورت کسر اخیر ، همان علامت  $(-2x+1)$  است و علامت مخرجش از حاصل ضرب علامتهای  $(x+2)$  و  $(x+3)$  بدست می‌آید و از جدولی که در صفحه ۱۱۹ تنظیم شده ، علامت کسر و بالنتیجه جواب نامعادله معین می‌شود :

x	$-\infty$	-۳	-۲	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x+1$	+	+	+	+	+
$x+3$	-	-	+	+	+
$x+2$	-	-	-	+	+
نتیجه	+	+	+	+	+

جواب نامعادله عبارت است از :  $x < -3$  و  $-\frac{1}{2} < x < -2$ .

### تمرین

نامعادلات زیر را حل کنید :

$$1) \quad 2x-6 < x+1 \quad 2) \quad 3x-10 < 7x$$

$$3) \quad 6 > \frac{2}{3} + 2x \quad 4) \quad \frac{x}{8} - 6 > \frac{x}{5}$$

$$5) \quad \frac{5}{6} < \frac{1}{5}x + 1 \quad 6) \quad \frac{2}{3} - \frac{2x}{3} > \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

$$7) \quad \frac{1+x}{3} + 4 - 5x > \frac{2x}{9} \quad 8) \quad \frac{x-5}{2} + x > 2 - \frac{4-x}{2}$$

$$9) \quad 4 - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{1+x}{2} - \frac{1+x}{3}$$

$$10) \quad \frac{1}{x+2} > 2 - \frac{2(x-1)}{x-2}$$



$$\frac{2x+2}{1-2x} < 0 \quad -۱۲ \quad \frac{2x+1}{1-x} > 2 \quad -۱۱$$

$$\frac{(2x-1)(x-1)}{2x-2} < 0 \quad -۱۳$$

$$(2x+5)(x+2)(2x-4)(7x-4) > 0 \quad -۱۴$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-4)} > 1 \quad -۱۵$$

$$2x+20 > (x+4)(x+5) \quad -۱۶$$

$$-1 < \frac{2+2x}{4-2x} < 1 \quad -۱۸ \quad 2 > \frac{2x+4}{6x+5} > 2 \quad -۱۷$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad -۲۰ \quad \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2} < 0 \quad -۱۹$$

$$\frac{x^2-a^2}{x} < 0 \quad -۲۲ \quad \frac{x+1}{x-2} < 0 \quad -۲۱$$

نامعادلات زیر را در دو حالت  $a > 0$  و  $a < 0$  حل کنید :

$$\frac{x-1}{a} > \frac{x}{2} - 2 \quad -۲۴ \quad \frac{a}{2x-1} > 0 \quad -۲۳$$

$$\frac{ax+2}{ax-4a} < 4 \quad -۲۶ \quad \frac{(2ax+1)^2}{x-a} > 0 \quad -۲۵$$

$$\frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{4(a+x)} > 0 \quad -۲۷$$

## فصل پنجم

### حل دستگاههای چند مجهولی درجه اول

۱- معادله را چند مجهولی گویند ، وقتی که شامل بیش از يك حرف مجهول باشد . معادله :  $2x + 3y = 6$  معادله ای است دو مجهولی ولی معادله :  $\frac{2x-4}{2} - \frac{x}{2} = 2(x+1)$  چون فقط شامل حرف مجهول  $x$  است ، معادله ای يك مجهولی است .

چنانچه معادله دارای  $n$  مجهول باشد ، معادله را  $n$  مجهولی می گویند . اگر چند معادله چند مجهولی داشته باشیم و يك یا چند مقدار معین و مشخص از هر مجهول در همگی آن معادله ها صدق کند ، آن چند معادله با هم تشکیل يك دستگاه می دهند . معادلات  $2x + y = 12$  و  $5x - 4y = 17$  يك دستگاه دو معادله دو مجهولی تشکیل می دهند . زیرا منحصر آ مقادیر  $x = 5$  و  $y = 2$  در هر دو معادله صدق می کنند . اعداد ۵ و ۲ را جواب دستگاه می گویند .

مقصود از حل يك دستگاه چند معادله چند مجهولی ، تعیین مقادیر مجهولات است بطوری که در هر يك از معادلات دستگاه صدق کنند .

## ۳ - حل دستگاه چندمعادله چند مجهولی - می توان از يك

معادله، یکی از حروف مجهول را بر حسب حروف مجهول دیگر پیدا کرد و در سایر معادلات به جای آن حرف مجهول، مساویش را قرار داد. به این ترتیب با حذف یکی از مجهولات، از تعداد مجهولات و معادلات یکی کم می شود. چنانچه این عمل را ادامه دهیم، به يك معادله يك مجهولی می رسیم که بسهولت قابل حل است.

همینکه مقدار مجهول معادله نهایی بدست آمد، به کمک این مقدار متدرجاً مقدار سایر مجهولات دستگاه را معلوم می کنیم.

می توان مقدار جبری ضرایب يك مجهول را در معادلات، دو بندو متحد کرد. برای این کار، دو معادله را در دو عدد جبری مناسب ضرب می کنیم تا مقدار جبری ضرایب متساوی شوند.

پس از آنکه مقدار جبری ضرایب يك حرف مجهول در دو معادله متساوی شدند، دو معادله را عضو بعضو از یکدیگر تفریق می کنیم تا آن حرف مجهول حذف شود.

از این طریق نیز با حذف يك حرف مجهول، از تعداد مجهولات و معادلات یکی کاسته می شود و با ادامه همین رویه می توانیم تدریجاً از تعداد مجهولات و معادلات بکاهیم تا بالاخره مانند حالت قبل به يك معادله يك مجهولی برسیم و با تعیین مجهول آخرین معادله، حل دستگاه را مانند حالت قبل پایان رسانی.

## I - دستگاه های دو مجهولی درجه اول:

الف - دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول زیر را حل

کنید:

$$(E) \quad \begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$$

$$x = \frac{18 - 4y}{3}$$

$$2\left(\frac{18 - 4y}{3}\right) - 5y = -11$$

پس از اختصار،  $y = 3$ . این مقدار  $y$  را در یکی از معادلات دستگاه (E)، مثلاً در معادله اول دستگاه، به جای  $y$  قرار می دهیم و  $x$  را بدست می آوریم:

$$3x + 4 \times 3 = 18$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

در این طرز عمل، می گویند دستگاه (E) به «طریقه تبدیلی» حل شده و مجهول  $x$  به طریقه تبدیلی از معادله دستگاه (E) حذف شده است (حذف تبدیلی).

ب - دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول زیر را حل کنید:

$$(E') \quad \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

معادله اول دستگاه (E') را در ۲ و معادله دومش را در ۳ ضرب

می‌کنیم تا ضرایب  $x$  در دو معادله برابر شوند. از تفریق معادلات حاصل،

$x$  حذف می‌شود و  $y$  بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 8 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases}$$


---


$$\begin{aligned} -13y &= -13 \\ y &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

با این نحوه عمل می‌گویند دستگاه  $(E')$  به «طریقه تحویلی»

حل شده و مجهول  $x$ ، بین دو معادله دستگاه  $(E')$  به طریقه تحویلی

حذف شده است (حذف تحویلی).

ج - دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول زیر را حل کنید:

$$(E'') \quad \begin{cases} 4x - 5y = 13 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

از معادلات اول و دوم دستگاه  $(E'')$  مقدار  $x$  را بر حسب  $y$

حساب می‌کنیم و دو مقدار  $x$  را که به این ترتیب بدست می‌آید مساوی

هم قرار می‌دهیم تا معادله‌ای یک مجهولی تشکیل شود:

$$2x = 13 + 5y$$

$$x = \frac{13 + 5y}{2}$$

$$2x = 13 + 5y$$

$$x = \frac{1 - 3y}{2}$$

$$\frac{13 + 5y}{2} = \frac{1 - 3y}{2}$$

$$13 + 5y = 1 - 3y$$

$$11y = -12$$

$$y = -1$$

$$x = 2$$

با این ترتیب که عمل شد، می‌گویند دستگاه  $(E'')$  به

«طریقه قیاسی» حل شده و مجهول  $x$  بین دو معادله دستگاه  $(E'')$  به

طریقه قیاسی حذف شده است (حذف قیاسی).

د - حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول به کمک

قاعده کرامر (Cramer):

یک دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول را همیشه می‌توان

به صورت کلی زیر نوشت:

$$(E_1) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

در دستگاه  $(E_1)$ ، حروف  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $a'$  و  $b'$  و  $c'$  نمایش

اعداد معلومند که ممکن است مثبت یا منفی یا صفر باشند. اعداد  $a$

و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  ضرایب حروف مجهول  $x$  و  $y$  هستند و  $c$  و  $c'$  جمله‌های

معلوم دستگاه نامیده می‌شوند.

اگر دستگاه  $(E_1)$  را به طریق حذف تحویلی حل کنیم چنین

خواهیم داشت :

$$\begin{cases} aa'x + ba'y = ca' \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases}$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'$$

$$(E_1) \quad \boxed{y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}} \quad \text{و از آنجا :}$$

به همین ترتیب مقدار  $x$  به صورت زیر بدست می آید :

$$(E_1) \quad \boxed{x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}}$$

دستورهای  $(E_1)$  و  $(E_2)$  را با ضبط و حفظ قاعده زیر ، منسوب

به گرامر ، بسهولة می توان نوشت :

**قاعده گرامر :**

در طرف دوم دستورهای  $(E_1)$  و  $(E_2)$  ، که به ترتیب مقادیر دو

مجهول  $y$  و  $x$  را بدست می دهند ، برای نوشتن مخرج کافی است

ضرایب  $(a$  و  $b')$  را از طرفی و ضرایب  $(b$  و  $a')$  را از طرف دیگر

ضلیبوار در هم ضرب کرده و حاصل ضرب دوم را از حاصل ضرب اول کم کنیم .



اگر در این مخرج به جای حروف  $a$  و  $a'$  به ترتیب حروف

$c$  و  $c'$  را قرار دهیم ، صورت کسری که مقدار  $x$  را بدست می دهد

حاصل خواهد شد .

همچنین صورت کسری که مقدار  $y$  را بدست می دهد به این

ترتیب حاصل می شود که در مخرج نامبرده حروف  $c$  و  $c'$  را به ترتیب

جانشین  $b$  و  $b'$  کنیم .

**مثال** - دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول زیر را حل

کنید :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$$

دستگاه مفروض را به کمک دستورهای  $(E_1)$  و  $(E_2)$  و طبق قاعده

گرامر با توجه به مقادیر جبری  $a$  و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  و  $c$  و  $c'$  به شرح زیر

حل می کنیم :

$$a=3 \quad b=4 \quad c=18$$

$$a'=2 \quad b'=-5 \quad c'=-11$$

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{18(-5) - 4(-11)}{2(-5) - 4 \times 2} = \frac{-46}{-22} = 2$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{2(-11) - 18 \times 2}{2(-5) - 4 \times 2} = \frac{-64}{-22} = 3$$

**بحث :**

**اولا** - اگر مقدار  $(ab' - ba')$  مخالف صفر باشد ، دستگاه  $(E_1)$

منحصراً دارای يك جواب برای هر يك از دو مجهول  $x$  و  $y$  خواهد بود و مقدار جوابها از دو دستور  $(E_r)$  و  $(E_l)$  بدست خواهد آمد .  
به عبارت دیگر با شرط:

$$ab' - ba' \neq 0$$

$$ab' \neq ba' \quad \text{یا}$$

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \quad \text{یا}$$

دستگاه  $(E_l)$  منحصراً دارای يك جواب برای هر يك از دو مجهول  $x$  و  $y$  خواهد بود.

ثانیاً - اگر مقدار  $ab' - ba' = 0$  یعنی  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  باشد دو حالت ممکن است اتفاق افتد :

حالت اول -  $ac' - ca' \neq 0$  و در نتیجه  $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ ؛ در این صورت دستگاه  $(E_l)$  ممنوع است ؛ بطور خلاصه با شرط :  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  دستگاه  $(E_l)$  ممنوع است .

حالت دوم -  $ac' - ca' = 0$  و در نتیجه  $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ ؛ در این صورت دستگاه  $(E_l)$  مبهم است ؛ بطور خلاصه با شرط :  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  دستگاه  $(E_l)$  مبهم است و جوابهای بیشمار دارد .

ثالثاً - اگر ضرایب  $a$  و  $a'$  و  $b$  و  $b'$  همگی صفر باشند نیز

دو حالت تشخیص می دهیم :

حالت اول - یکی از ضرایب  $c$  یا  $c'$  مخالف صفر است ؛ در این صورت دستگاه  $(E_l)$  ممنوع است .  
حالت دوم -  $c = c' = 0$ ؛ در این صورت دستگاه  $(E_l)$  مبهم است .

در جدول زیر، حالات مختلف این بحث خلاصه شده است:

دستگاه  $(E_l)$  دارای جواب است .  $ab' - ba' \neq 0$

$$ab' - ba' = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} ac' - ca' \neq 0 \\ \text{دستگاه } (E_l) \text{ ممنوع است} \end{array} \right. \\ \\ a = a' = b = b' = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} c \text{ یا } c' \neq 0 \\ \text{دستگاه } (E_l) \text{ ممنوع است} \\ \\ c = c' = 0 \\ \text{دستگاه } (E_l) \text{ مبهم است} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ه - دستگاه همگن (Homogène) - معادله ای را همگن گویند ، وقتی که تمام جمله های آن نسبت به حروف مجهول هم درجه باشند . معادلات :  $2x + 3y = 0$  و  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$  نسبت به حروف  $x$  و  $y$  همگن هستند . (تمام جمله های معادله اول نسبت به  $x$  و  $y$  از درجه اول و تمام جمله های معادله دوم نسبت به  $x$  و  $y$  از درجه دومند).

دستگاههایی به صورت:  $\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$  را همگن می نامند.

اگر  $ab' - ba' \neq 0$  باشد، تنها جواب دستگاه،  $x=y=0$  است.

چنانچه  $ab' - ba' = 0$  باشد دستگاه مبهم است.

## II - دستگاههای چند مجهولی درجه اول:

الف - دستگاه سمعادله سمجهولی درجه اول زیرا حل کنید:

$$(A) \quad \begin{cases} x+2y-4z=24 \\ 2x-y+2z=-11 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$$

اگر معادله دوم دستگاه (A) را در ۲ ضرب کنیم و با معادلات اول

و سوم همین دستگاه جمع کنیم  $y$  حذف می شود:

$$\begin{cases} 4x-2y+6z=-22 \\ x+2y-4z=24 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} 5x+2z=2 \\ 4x-2y+6z=-22 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$$

$$7x+7z=-14$$

$$(C) \quad x+z=-2 \quad \text{یا}$$

از معادلات (B) و (C)، دستگاه زیر بدست می آید که از حل

آن مقدار  $x$  و  $z$  معلوم می شود:

$$(D) \quad \begin{cases} 5x+2z=2 \\ x+z=-2 \end{cases}$$

$$(E) \quad \begin{cases} 5x+2z=2 \\ 2x+2z=-4 \end{cases}$$

$$3x=6$$

$$\boxed{x=2}$$

$$x+z=-2$$

$$2+z=-2$$

$$\boxed{z=-4}$$

$$3x+2y+z=8$$

$$6+2y-4=8$$

$$2y=6$$

$$\boxed{y=3}$$

ب - دستگاه زیر را حل کنید:

$$(A) \quad \begin{cases} x+2y-2z+4u=21 \\ 3x+2y-4z-u=8 \\ 2x-y-5z+3u=12 \\ 2x+2y-z+u=17 \end{cases}$$

معادله اول دستگاه (A) را در ۲ ضرب کرده و از معادله حاصل،

معادلات سوم و چهارم دستگاه (A) را تفریق می کنیم:

-۱۳۳-

$$25y - 5z + 25u = 245$$

$$3y - 5z + 12u = 85$$

$$\hline 22y + 12u = 160$$

$$(E) \quad 11y + 6u = 80 \quad \text{یا}$$

معادله دوم دستگاه (A') را نیز از معادله سوم همین دستگاه

کم می‌کنیم:

$$3y - 5z + 12u = 85$$

$$2y - 5z + 7u = 45$$

$$(F) \quad y + 6u = 40$$

از ترکیب معادلات (E) و (F)، دستگاه دو مجهولی

(A'') که شامل دو مجهول  $y$  و  $u$  است به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(A'') \quad \begin{cases} 11y + 6u = 80 \\ y + 6u = 40 \end{cases}$$

معادله دوم دستگاه (A'') را از معادله اول همین دستگاه تفریق

می‌کنیم:

$$10y = 40$$

$$\boxed{y = 4}$$

حال در معادله دوم دستگاه (A'') به‌جای  $y$  مقدارش را قرار

داده و از معادله حاصل، مقدار  $u$  را بدست می‌آوریم:

-۱۳۴-

$$2x + 4y - 6z + 8u = 62$$

$$2x - y - 5z + 3u = 12$$

$$(B) \quad 5y - z + 5u = 49$$

$$2x + 4y - 6z + 8u = 62$$

$$2x + 2y - z + u = 12$$

$$(C) \quad 2y - 5z + 7u = 45$$

بار دیگر، معادله اول دستگاه (A) را در ۳ ضرب کرده و از

معادله حاصل، معادله دوم دستگاه (A) را تفریق می‌کنیم:

$$3x + 6y - 9z + 12u = 93$$

$$3x + 2y - 4z - u = 8$$

$$(D) \quad 2y - 5z + 12u = 85$$

از ترکیب معادلات (B) و (C) و (D)، دستگاه (A') را که

فاقد مجهول  $x$  فقط شامل سه مجهول  $y$  و  $z$  و  $u$  می‌باشد به صورت

زیر تشکیل می‌دهیم:

$$(A') \quad \begin{cases} 5y - z + 5u = 49 \\ 2y - 5z + 7u = 45 \\ 2y - 5z + 12u = 85 \end{cases}$$

معادله اول دستگاه (A') را در ۵ ضرب کرده و از معادله حاصل،

معادله سوم دستگاه (A') را تفریق می‌کنیم:



جدید قرار دهیم بطوری که معادلات حاصل : اولاً - شامل مجهولات اصلی نباشند. ثانیاً - از درجه دوم و بالاتر نباشند، این مجهول جدید را مجهول معاون می گویند .

مثال - مطلوب است حل دستگاه دومعادله دومجهولی :

$$(I) \begin{cases} \frac{2x}{3x-y+1} + \frac{3y}{2x-3y+2} = -\frac{1}{3} \\ \frac{3x}{2x-y+1} - \frac{4y}{2x-3y+2} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

فرض می کنیم :

$$(II) \begin{cases} \frac{x}{3x-y+1} = A \\ \frac{y}{2x-3y+2} = B \end{cases}$$

باشد؛ بنابراین فرض، دستگاه (I) به صورت زیردرمی آید:

$$(III) \begin{cases} 2A + 3B = -\frac{1}{3} \\ 3A - 4B = \frac{7}{3} \end{cases}$$

ازحل دستگاه (III) نتیجه می شود :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$4 + 6u = 40$$

$$6u = 36$$

$$u = 6$$

در یکی از معادلات دستگاه (A')، مثلاً در معادله اول این

دستگاه، به جای  $y$  و  $u$  مقادیرشان را قرار داده و از معادله حاصل مقدار  $z$  را حساب می کنیم :

$$20 - z + 30 = 49$$

$$z = 1$$

بالاخره در یکی از معادلات دستگاه (A)، مثلاً در معادله اول

این دستگاه، به جای  $y$  و  $z$  و  $u$  مقادیرشان را جانشین کرده و از معادله حاصل مقدار  $x$  را تعیین می کنیم :

$$x + 8 - 3 + 24 = 31$$

$$x = 2$$

### ۳ - حل دستگاه معادلات چند مجهولی به کمک مجهول معاون :

در حل پاره ای معادلات (کسری یا صم) پس از حذف مخرجها یارادیکالها و انجام اختصارات ممکن، معادلاتی از درجه دوم و بالاتر حاصل می شود که گاهی حل آنها غیرممکن بنظر می رسد.

اگر بتوانیم عباراتی را که شامل مجهولات اصلی است، مجهول

حال در دستگاه (II) به جای A و B مقادیرشان را قرار می دهیم

تادستگاه (IV) به صورت زیر حاصل شود:

$$(IV) \begin{cases} \frac{x}{3x-y+1} = \frac{1}{3} \\ \frac{y}{2x-3y+2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

دستگاه (IV) پس از حذف مخرجها چنین می شود :

$$(V) \begin{cases} 3x = 3x - y + 1 \\ 2y = -2x + 3y - 2 \end{cases}$$

و از دستگاه (V) مقادیر x و y به صورت زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

تمرین :

دستگاههای دومعادله دوجمله‌ای زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -13 \\ 6x + 5y = 10 \end{cases} \quad -2 \quad \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases} \quad -1$$

$$\begin{cases} 17x - 14y = 291 \\ 13x + 8y = 129 \end{cases} \quad -9 \quad \begin{cases} 2a + 12b = 7/88 \\ 35a - b = -9/8 \end{cases} \quad -3$$

$$\begin{cases} 0/3x + 0/7y = -11 \\ 0/8x - 0/5y = 18 \end{cases} \quad -5$$

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{5} \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \quad -7 \quad \begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{y}{3} = -1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{9} = 9 \end{cases} \quad -6$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{4y}{3} + 1 = 8x - \frac{1}{3} - y \\ \frac{x-2}{6} + \frac{2y}{3} - 3x = 4 - \frac{2x}{3} + 6x \end{cases} \quad -8$$

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{x-5y}{3} + 1 = 0 \\ \frac{7x-y}{6} + \frac{x-2y}{3} = 1 \end{cases} \quad -9$$

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{a} + \frac{y-2x}{1} = \frac{2(a^2+1)}{a} \\ \frac{5x+2y}{5} - \frac{2x-y}{a} = \frac{a^2+26a-5}{10a} \end{cases} \quad -10$$

مطلوب است حل دستگاههای زیر:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 17 \\ 3x - 2y - z = 12 \\ 5x + 3y - 2z = 18 \end{cases} \quad -12 \quad \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases} \quad -11$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -3 \\ x - 2y - 3z = 7 \\ 5x + 3y + 9z = -4 \end{cases} \quad -19 \quad \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y - z + 13 = 0 \\ x - 2z + 7 = 0 \end{cases} \quad -13$$

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = -2 \end{cases} \quad -15$$

-۱۳۹-

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z + t = 2 \\ 2x + 2y - z - 4t = 0 \\ -x + 2y - 2z - 2t = -2 \\ 2x + 2z - 2t = 2 \end{cases} \quad -۲۶$$

$$\begin{cases} 2x - 2z = 10 \\ 2y - 2u = 5 \\ z + 2u = 19 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \quad -۲۸ \quad \begin{cases} \frac{5x + 2y}{x + y} = 9 \\ \frac{2(z - x)}{x - y + z} = 1 \\ \frac{2x + 2y - z}{\frac{x}{2} + 2} = 4 \end{cases} \quad -۲۷$$

مطلوب است حل و بحث دستگاههای زیر :

$$\begin{cases} mx - 2y = m \\ (m - 1)x - y = 1 \end{cases} \quad -۳۰ \quad \begin{cases} mx + 2y = m \\ 2x + my = 2 \end{cases} \quad -۲۹$$

$$\begin{cases} (m - 1)x + (2m - 2)y = 2 \\ (2m - 1)x - 2y = m + 2 \end{cases} \quad -۳۱$$

$$\begin{cases} 2x - (m + 2)y = m - 1 \\ (2m - 1)x + (2m + 2)y = m + 2 \end{cases} \quad -۳۲$$

$$\begin{cases} mx + 2y = 2 \\ (m - 1)x + 2y = 2 \end{cases} \quad -۳۳$$

$$\begin{cases} (m - 1)^2 x + (m^2 - 1)y = (m + 1)^2 \\ (2m - 1)x + (m + 1)y = m^2 - 1 \end{cases} \quad -۳۴$$

-۱۳۸-

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 2y + 2z = -5 \\ -5x + 2z = 4 \end{cases} \quad -۱۷ \quad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = -1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad -۱۶$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x = -5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -4 \end{cases} \quad -۱۹ \quad \begin{cases} \frac{2x}{2} - y + \frac{2z}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{2} - \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{2y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \quad -۱۸$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 5t - 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad -۲۰$$

$$\begin{cases} \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 1}{5} \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad -۲۲ \quad \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{2}{z} - \frac{2}{y} = 0 \\ \frac{2}{z} + \frac{1}{x} = \frac{2}{y} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad -۲۱$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ y - 2z - t = -2 \\ x + 2t = -2 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad -۲۳ \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z - t = 2 \\ x - 2y - 2z + t = -2 \\ 2x - 2y - z + 2t = 2 \end{cases} \quad -۲۴$$

$$\begin{cases} \frac{x + 2y}{5x + 2z} = \frac{y}{9} \\ \frac{2y + 2x}{x + 2y} = \frac{1}{y} \\ x + y + z = 128 \end{cases} \quad -۲۵$$

-۱۳۱-

$$\begin{cases} \frac{xy}{ay+bx} = c \\ \frac{xz}{az+cx} = b \\ \frac{yz}{bz+cy} = a \end{cases}$$

$$-۳۳ \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \Delta \\ \frac{x}{r} + \frac{y}{r} = 2xy \end{cases}$$

-۳۲

$$\begin{cases} \frac{xy}{\Delta x + \nabla y} = \rho \\ \frac{xz}{\nabla x + \nabla z} = \lambda \\ \frac{yz}{\nabla y + \Delta z} = \rho \end{cases}$$

$$-۳۵ \quad \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{\Delta} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{\Delta} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{12} \end{cases}$$

-۳۴

-۱۳۰-

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a \\ (a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y = a^2 \end{cases} \quad -۳۵$$

-۳۶  $m$  و  $n$  را بطریقی تعیین کنید که جوابهای دستگاه زیر  $x=3$  و  $y=-3$  باشد :

$$\begin{cases} (2m+2n)x - (m-1)y = 2m-2n+1 \\ (2m+n-1)x + (m+n-1)y = 2m-n+2 \end{cases}$$

دستگاههای زیر را حل کنید :

$$-۳۸ \quad \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = m \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = n \end{cases} \quad -۳۷ \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x+y) - b(x-y) = 2a \\ a(x-y) - b(x+y) = 2b \end{cases} \quad -۳۹$$

$$-۴۰ \quad \begin{cases} \frac{1}{2x-2y+1} + \frac{1}{x+2y-2} = \frac{\Delta}{12} \\ \frac{1}{2y+x-2} - \frac{1}{2x-2y+1} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$-۴۱ \quad \begin{cases} \frac{2}{x+2y+1} + \frac{2}{2x+2y+2} = -\frac{12}{2} \\ \frac{2}{x+2y+1} - \frac{1}{2x+2y+2} = 0 \end{cases}$$

استفاده از مفروضات و معلومات مسئله یا با بکار بردن بعضی خواص جبری یا هندسی نوشته شوند؛ تعداد معادلات، باید همیشه برابر با تعداد مجهولات مسئله باشد.

ج - پس از آنکه معادلات مسئله نوشته شدند، آنها را بطوری که در حل معادلات يك مجهولی درجه اول و حل معادلات اصم و دستگای درجه اول دیده ایم حل می کنیم.

د - بعد از حل معادلات و تعیین جوابهای آنها، باید تحقیق کرد که کدامیک از جوابها قابل قبولند، یعنی باید تحقیق کرد که کدامیک از جوابها درهمه شرایط مسئله صدق می کنند.

مثال ۱ - تخم مرغ فروشی ۵ عدد کمتر از  $\frac{7}{9}$  تخم مرغهایش را فروخت. پیش خود حساب کرد که اگر به باقیمانده تخم مرغها ۳۷ عدد اضافه کند، به اندازه  $\frac{1}{9}$  تخم مرغهای اولیه بیشتر از تخم مرغهای قبل از فروش خواهد داشت. تعیین کنید تعداد تخم مرغهای این شخص را.

حل - اگر تعداد تخم مرغها را  $x$  فرض کنیم، تعداد تخم مرغهای فروش رفته  $(x - 5)$  می شود و باقیمانده تخم مرغها:  $x - (\frac{7}{9}x - 5) = x - \frac{7}{9}x + 5 = \frac{2}{9}x + 5$  عدد خواهد بود و طبق صورت مسئله باید این باقیمانده به اضافه ۳۷ به اندازه  $x$  (تعداد قبل از فروش) به اضافه  $\frac{1}{9}$  تعداد اولیه (یعنی

## حل و بحث مسائل درجه اول

در حل مسائل فکری از طریق جبر، باید نکات زیر را مورد توجه قرار داد:

الف - انتخاب مجهول. ب - نوشتن معادلات.

ج - حل معادلات. د - بحث.

الف - در مورد انتخاب مجهول اکثر آ می توان از صورت مسائل استفاده کرد.

چنانچه در صورت مسائل بطور صریح قید نشده باشد، باید مجهول را طوری انتخاب کرد که بسهولت بتوان به نتیجه مطلوب رسید.

پس از آنکه مجهول یا مجهولات مسئله انتخاب شدند، آنها را به حروف  $x$  و  $y$  و  $z$  و .... نمایش می دهند.

ب - نوشتن معادله یا معادلات مسئله یعنی نوشتن رابطه یا روابطی که مجهول یا مجهولات انتخاب شده، با اجابت شرایط منظور در مسئله، در آن روابط صدق کنند؛ این روابط ممکن است با

$\left(\frac{x}{6}\right)$  باشد؛ پس معادله مسئله به صورت زیر نوشته می شود:

$$(I) \quad x - \left(\frac{5}{6}x - 5\right) + 37 = x + \frac{x}{6}$$

حال معادله (I) را با انجام عملیات لازم و اختصارات ممکن

به ترتیب زیر حل می کنیم:

$$-\frac{5}{6}x + 5 + 37 = \frac{x}{6}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{5x}{6} = 42$$

$$3x + 5x = 42 \times 6$$

$$8x = 252$$

$$\boxed{x = 108}$$

پس تعداد تخم مرغها ۱۰۸ عدد بوده است.

**مثال ۴ -** پدري داراي خود را بين فرزندان به اين ترتيب

تقسيم مي کند: به پسر اول (بزرگتر از همه) يک هزار ريال به اضافه  $\frac{1}{4}$

بقية داراي خود و به پسر دوم ۲۰۰۰ ريال به اضافه  $\frac{1}{4}$  باقيمانده ....

چنانچه سهم تمام فرزندان متساوي باشد، معين کنيد داراي پدر وسهم

هريك از فرزندان وعده آنها را.

**حل -** اگر داراي پدر را  $x$  ريال فرض كنيم، سهم پسر اول

خواهد شد:

$$\text{سهم پسر اول} \quad 1000 + (x - 1000) \cdot \frac{1}{4} = \frac{6000 + x}{4}$$

براي محاسبه سهم پسر دوم بايد در وهله اول، باقيمانده دارايي

پدر را پس از پرداختن سهم پسر اول تعيين كنيم (باقيمانده اول) كه

مقدار اين باقيمانده چنين مي شود:

$$\text{باقيمانده اول:} \quad x - \frac{6000 + x}{4} = \frac{3x - 6000}{4}$$

سپس بايد از اين باقيمانده اول، ۲۰۰۰ ريال را كه به پسر

دوم داده شده كم كنيم و با تعيين باقيمانده دوم،  $\frac{1}{4}$  آن را اختيار کرده

و حاصل را به ۲۰۰۰ ريال بيفزايم تا سهم پسر دوم بدست آيد:

$$\text{باقيمانده دوم:} \quad \frac{3x - 6000}{4} - 2000 = \frac{3x - 78000}{4}$$

$$\text{سهم پسر دوم:} \quad 2000 + \left(\frac{3x - 78000}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3x + 78000}{16}$$

چون بنا بر فرض مسئله سهم پسر ها متساوي است، پس معادله

مسئله چنين مي شود:

$$(I) \quad \frac{6000 + x}{4} = \frac{3x + 78000}{16}$$

ازحل معادله (I) دارايي پدر پيدا مي شود:

$$42000 + 7x = 6x + 78000$$

دارایی پدر :

$$x = ۳۶۰۰۰ \text{ ریال}$$

از معادله اول دستگاه (II) حاصل می شود:

$$x = ۵y$$

و سهم پدر بزرگتر خواهد شد:

$$\frac{۶۰۰۰ + x}{۷} = \frac{۶۰۰۰ + ۳۶۰۰۰}{۷} = ۶۰۰۰$$

اکنون که دارایی پدر و سهم هر پدر معین شد ، می توان عده

فرزندان را معین کرد :

$$\text{عده فرزندان : } ۶۰۰۰ : ۳۶۰۰۰ = ۶ \text{ نفر}$$

مثال ۳- دو عدد چنان تعیین کنید که تفاضل و مجموع و حاصل

ضرب آنها با ترتیب با اعداد ۲ و ۳ و ۵ متناسب باشند .

حل - آن دو عدد را  $x$  و  $y$  فرض می کنیم . طبق صورت مسئلهباید  $(x-y)$  و  $(x+y)$  و  $xy$  با اعداد ۲ و ۳ و ۵ متناسب باشند؛ یعنی

داشته باشیم :

$$\frac{x-y}{۲} = \frac{x+y}{۳} = \frac{xy}{۵}$$

معادلات اخیر را می توان به صورت دستگاه زیر نوشت:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{x-y}{۲} = \frac{x+y}{۳} \\ \frac{x-y}{۲} = \frac{xy}{۵} \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} ۳x - ۲y = ۲x + ۲y \\ ۵x - ۵y = ۲xy \end{cases}$$

یا

در معادله دوم دستگاه (II) به جای  $x$  مقدارش را بر حسب  $y$ 

قرار می دهیم، حاصل می شود :

$$۲۵y - ۵y = ۱۰y^۲$$

$$۲۰y = ۱۰y^۲$$

$$۲۰y - ۱۰y^۲ = ۰$$

$$۱۰y(۲-y) = ۰$$

$$۱۰y = ۰$$

$$y = ۰$$

$$۲-y = ۰$$

$$y = ۲$$

اگر  $y = ۰$  باشد ، از رابطه  $x = ۵y$  خواهیم داشت :  $x = ۰$  ،جوابهای  $x = ۰$  و  $y = ۰$  با شرایط مسئله تطبیق می کنند ولی متمایزنیستند . اگر  $y = ۲$  باشد ، از رابطه  $x = ۵y$  نتیجه می شود :  $x = ۱۰$ پس جوابهای متمایز دستگاه  $x = ۱۰$  و  $y = ۲$  است .

مثال ۴- پدری ۳۹ سال و پسرش ۱۵ سال دارد . پس از چند

سال سن پدر سه برابر سن پسر می شود.

حل - اگر جواب مسئله را  $x$  سال فرض کنیم ، پس از  $x$  سال

سن پسر و پدر بترتیب چنین می شود:

$$\text{سن پدر : } ۱۵ + x$$

$$\text{سن پسر : } ۳۹ + x$$

و طبق صورت مسئله، پس از  $x$  سال باید سن پدر سه برابر سن پسر شده باشد؛ یعنی باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(I) \quad 29+x=3(15+x)$$

رابطه (I) معادله مسئله است و چون آن را حل کنیم، جواب

$$x = -3 \text{ را بدست می دهد.}$$

این جواب منطقی بدین معنی است که سن پدر هیچوقت در آینده سه برابر سن پسر نخواهد شد بلکه سه سال قبل سن پدر سه برابر سن پسر بوده است.

### تمرین

۱ - در فاصله A و B چرخهای جلو درشکای ۲۸۰۰ دور بیش از چرخهای عقب می زنند. چنانچه محیط چرخها  $1\frac{7}{8}$  متر و  $2\frac{7}{8}$  متر باشد، فاصله A و B را تعیین کنید.

۲ - قیمت ۲۰۰ جلد کتاب ۱۴۵۷۰ ریال است. هرگاه کتابها جلدی ۸۰ ریال و ۷۰ ریال قیمت داشته باشند، تعیین کنید از هر کدام چند جلد بوده است.

۳ - مطلوب است تعیین عددی که اگر از  $\frac{2}{3}$  آن ۱۲ واحد کم کنیم، حاصل مساوی نصف همان عدد شود.

۴ - پدری ۳۸ سال و پسرش ۱۱ سال دارد. پس از چند سال سن پدر دو برابر سن پسر می شود.

۵ - پدری ۵۶ سال و پسرش ۲۹ سال دارد. پس از چند سال سن پدر دو برابر سن پسر می شود (تعمیر جواب).

۶ - چند نفر مبلغی را بین خود قسمت کردند. اولی ۱۰۰۰ ریال برداشت به اضافه  $\frac{1}{9}$  باقیمانده. دومی ۲۰۰۰ ریال برداشت به اضافه  $\frac{1}{9}$

باقیمانده و نفرات بعدی نیز همینطور برداشتند. چنانچه سهم این چند نفر متساوی باشد، اصل پول و تعداد نفرات وسهم هر یک را تعیین کنید.

۷ - در ساعت ۱۲ عقربه ساعت شمار بر عقربه دقیقه شمار منطبق است. معین کنید درجه ساعتی مجدداً دو عقربه روی هم قرار می گیرند.

A - عدد ۴۶ را به دو جزء طوری تقسیم کنید که مجموع خارج قسمت های آنها بر ۳ و برابر ۱۰ شود.

۹ - پدری با پسرش قرار گذاشت به ازای نمره قبولی هر پرش ششاهی ۵۰ ریال بدهد و هر پرش که نمره قبولی نداشته باشد ۴۰ ریال بگیرد. پس از ۳۰ پرش پسر ۶۹۰ ریال پول داشت. معین کنید چند با. نمره قبولی داشته است.

۱۰ - مطلوب است تعیین يك عدد صدقمی بطوری که رقم سدگان آن سه برابر رقم یکان و  $\frac{2}{3}$  رقم دهگان باشد؛ و اگر عدد را به عکس ترتیب بنویسیم، ۳۹۶ واحد کوچکتر شود.

۱۱ - فاصله دو شهر A و B، ۸ کیلومتر است. دو متحرك اولی با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت و دومی با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت از A به سمت



**B** حرکت می‌کنند. معین کنید درجه فاصله‌ای از شهر **A** دومی‌اولی را ملاقات خواهد کرد، در صورتی که پس از رسیدن به شهر **B** ۱۵ دقیقه توقف به شهر **A** حرکت کند.

**۱۲** - بازرگانی سرمایه‌اش را به سه قسمت تقسیم می‌کند بطوری که قسمت اول و دوم باهم برابر و قسمت سوم مساوی مجموع آن دو قسمت باشد. اگر قسمت اول را با نرخ ۵٪ و قسمت دوم را با نرخ  $\frac{1}{4}$  ۵٪ و قسمت سوم را با نرخ ۵/۵٪ به مرابحه دهد، سود سالانه‌اش ۸۵۰۰ ریال می‌شود. مطلوب است سرمایه بازرگان.

**۱۳** - آلیاژی است از مس و طلا به وزن ۳۵۰ گرم و به عیار ۹۳۰٪، چند گرم مس باید به آن افزود تا آلیاژی به عیار ۹٪ بدست آید.

**۱۴** - اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه عدد صحیح متوالی است. طول اضلاع مثلث را بدست آورید (بحث).

**۱۵** - مثلث  $ABC$  مفروض است. خطی مانند  $DE$  به موازات  $BC$  چنان رسم کنید که  $BD + CE = DE + m$  (بحث).

**۱۶** - مجموع سن ۳ نفر ۴۱ سال است. سن دومی ۳ سال از اولی بیشتر و سن سومی ۴ سال از اولی کمتر است. سن هریک را پیدا کنید.

**۱۷** - مبلغ ۵۸ ریال با ۱۴ سکه ۵ ریالی و ۲ ریالی پرداخت شده است. معلوم کنید از هر کدام چند سکه بوده است.

**۱۸** - شخصی دفعه اول  $\frac{1}{5}$  پولش را به اضافه ۲۰ ریال خرج می‌کند،

دفعه دوم  $\frac{1}{5}$  باقی‌مانده را به اضافه ۵۰ ریال خرج می‌کند و  $\frac{26}{75}$  اصل پول برایش باقی می‌ماند. معین کنید چه مبلغ پول داشته است.

**۱۹** - نسبت دو سرمایه  $\frac{3}{4}$  است. اگر به آن که کمتر است ۱۰۰۰ ریال و به آن که بیشتر است ۲۰۰۰ ریال افزوده شود، نسبت آنها  $\frac{2}{3}$  خواهد شد. مبلغ هریک را تعیین کنید.

**۲۰** - حسن ۲۶ سال و حسین ۱۸ سال دارد. پس از چند سال سن حسن ۳ برابر سن حسین خواهد شد.

**۲۱** - در کارخانه‌ای ۱۲۰ مرد و زن و طفل کار می‌کنند. عده مردان برابر است با ۴ برابر عده زنان به اضافه ۴ نفر و نیز ۵ برابر عده اطفال به علاوه ۴ نفر. عده هریک را معین کنید.

**۲۲** - در یک عدد دورقمی، رقم دهگان  $\frac{2}{3}$  رقم یکان است و عددی که با همان دو رقم و به عکس ترتیب نوشته شود ۱۸ واحد از خود عدد بیش‌تر است. آن عدد را پیدا کنید.

**۲۳** - حسن به حسین گفت: «آن موقع که من به سن فعلی تو بودم، سن تونصف سن فعلی من بود و وقتی که تو به سن فعلی من برسی، مجموع سنین ما ۹۰ سال خواهد بود.» سن فعلی هریک را تعیین کنید.

**۲۴** - مبلغی بطور متساوی بین چند نفر تقسیم می‌شود. اگر به عده آنها ۳ نفر افزوده شود، سهم هریک ۱ ریال کم می‌شود. اگر از عده آنها ۲ نفر کم شود به سهم هریک ۱ ریال افزوده می‌شود. مبلغ وعده را تعیین کنید.

**۲۵** - عددی سه رقمی تعیین کنید که مجموع ارقامش ۱۳ باشد و رقم اتحاد ۳ برابر رقم صدگان باشد، و اگر ۳۹۶ واحد به آن افزوده شود، عددی با همان سه رقم ولی به عکس ترتیب بدست آید.

**۲۶** - خارج قسمت تقسیم دو عدد، ۴ و باقی‌مانده ۳۰ است. مجموع

مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت و باقیمانده ۵۷۴ است. مقسوم و مقسوم علیه را معلوم کنید.

۳۷ - سه نفر در مسابقه ای قرار گذاشتند که هر کدام نفر سوم شد پول دو نفر دیگر را دو برابر کنند. در سه مسابقه، هر کدام بنوبت يك دفعه سوم شد و پس از پایان مسابقه هر يك  $a$  ریال پول داشت. معلوم کنید قبل از شروع مسابقه هر يك چه مبلغ داشته است.

۳۸ - زرگری دو شمش دارد که اولی ۲۷۰ گرم طلا و ۳۰ گرم مس دارد و دومی ۲۰۰ گرم طلا و ۵۰ گرم مس دارد. معلوم کنید از هر يك از دو شمش چقدر باید انتخاب کند تا شمش جدیدی به وزن ۴۰۰ گرم و به عیار ۸۲۵/۰ بسازد.

۳۹ - سود سالانه دو سرمایه جمعاً ۳۷۵ ریال است. سرمایه اولی که ۱۵۰۰ ریال از دومی کمتر است، با نرخ ۵٪ و دومی با نرخ ۴٪ به مرابحه گذاشته شده است. سرمایه ها را تعیین کنید.

۴۰ - اتوموبیلی از  $A$  به  $B$  حرکت می کند. راه دارای سه قسمت سطح سربالایی و سراسیم است. در موقع رفتن از  $A$  به  $B$  قسمت سربالایی  $\frac{4}{5}$  قسمت سراسیم است. سرعت اتوموبیل در قسمت سطح ۴۰ کیلو متر در ساعت و در سربالایی ۲۵ کیلو متر و در سراسیمی ۵۰ کیلو متر است. اگر فاصله  $A$  و  $B$ ، ۸۰ کیلو متر و زمان رفتن از  $B$  به  $A$ ، ۴ دقیقه بیشتر از زمان رفتن از  $A$  به  $B$  باشد، طول هر قسمت از راه را حساب کنید.

۴۱ - دو ضلع  $a$  و  $b$  از مثلثی معلوم است و مجموع دو ارتفاع وارد به این دو ضلع برابر است با ارتفاع وارد به ضلع سوم. ضلع سوم مثلث را حساب کنید.

۴۲ - مساحت، مثلث متساوی الساقینی  $\frac{10}{9}$  مساحت مربعی است که بر

روی قاعده اش ساخته می شود و هر ساق مثلث ۲۳cm از قاعده بیشتر است. اضلاع مثلث را حساب کنید.

۳۳ - اضلاع  $AB=x$  و  $AC=y$  مثلث  $ABC$  را حساب کنید، در صورتی که  $BC=a$  و  $AB+AC=k$  و می دانیم که نیمساز رأس  $B$  ضلع  $AC$  را در نقطه  $D$  چنان قطع می کند که  $BD=DC$  است. ( $a$  و  $k$  مقادیر معلومند).

۳۴ - نیمدایره ای به مرکز  $O$  و به قطر  $AB=2R$  مفروض است. از نقطه  $C$  واقع بر  $AB$  و بین  $O$  و  $B$  عمودی بر آن اخراج می کنیم تا نیمدایره را در  $D$  قطع کند. مماس بر نیمدایره در نقطه  $D$  امتداد قطر  $AB$  را در  $E$  قطع می کند. مطلوب است تعیین نقطه  $C$  بقسمی که  $DE=CD+CB$  باشد.

$$2x + 2(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1) + (x - 2)(x - 1)$$

$$2x - 6 = 0$$

این معادله از درجه اول است.

۳- صورت کلی معادله يك مجهولی درجه دوم چنین است :

$$(I) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$a$  و  $b$  و  $c$  ضرایب معلوم جبری هستند. ضریب جمله درجه دوم

را  $a$  و ضریب جمله درجه اول را  $b$  و عدد یا جمله مستقل از  $x$  (مقدار ثابت) را  $c$  می نامند.

$b$  و  $c$  می توانند صفر باشند ولی هیچوقت ضریب جمله درجه دوم

یعنی  $a$  صفر نیست، زیرا اگر  $a$  صفر باشد دیگر معادله از درجه دوم نخواهد بود.

معادله درجه دوم را وقتی کامل گویند که ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$

مخالف صفر باشند؛ در غیر این صورت معادله را ناقص می گویند.

حل معادله درجه دوم، یعنی تعیین جوابهای آن بطوری که

در معادله صدق کنند. جواب معادله:  $2x + 1 = 0$  عدد  $-\frac{1}{2}$  و

جواب معادله:  $4x^2 - 5x + 1 = 0$  اعداد  $(\frac{1}{4})$  و  $(1)$  و جواب معادله:

$4x^2 + 1 = 0$  عدد  $(-1)$  است.

مثال-  $m$  را بطریقی تعیین کنید که یکی از جوابهای معادله

$0 = 2 - 2mx + (m - 1)x^2$  عدد  $(-2)$  باشد.

### حل معادله يك مجهولی درجه دوم

۱- در حل معادلات جبری يك مجهولی، اگر پس از حذف

مخرجها و رادیکالها و نقل تمام جمله ها، اعم از معلوم و مجهول، به

يك طرف، معادله را بر حسب قوای نزولی حرف مجهول مرتب کنیم،

بزرگترین توان مجهول را درجه آن معادله مرتب شده می گویند.

مثال ۱- معادله:  $\sqrt{x+1} = x+5$  را در نظر می گیریم.

برای حل آن چنین می کنیم:

$$x+1 = (x+5)^2$$

یا

$$x^2 + 9x + 24 = 0$$

معادله حاصل از درجه دوم است.

$$\text{مثال ۲- معادله } \frac{2x}{x^2-1} + 2 = \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} \text{ را}$$

در نظر می گیریم.

برای حل آن، مخرج را حذف و معادله را ساده و مرتب می کنیم:

عدد (۲-) که می‌خواهیم جواب معادله باشد، باید در معادله

صدق کند، یعنی:

$$2(m-1) - 2m + m - 2 = 0$$

$$2m - 2 - 2m + m - 2 = 0$$

$$m = 6$$

۳- حل معادلات ناقص درجه دوم:

الف- اگر  $b = c = 0$  باشد، معادله (I شماره ۲) به صورت

ناقص  $ax^2 = 0$  درمی‌آید. چون  $a \neq 0$  است،  $x^2 = 0$  یعنی  $x = 0$  مساوی

صفر است، پس باید هر يك از این عوامل ضرب صفر باشد. در نتیجه

معادله دارای دو جواب مساوی صفر است یا به عبارت دیگر می‌گویند:

معادله ریشه مضاعف صفر دارد.

مثال- مطلوب است حل معادله:

$$\left(\frac{5}{2}x + 8\right)^2 - 2(x+2)(x+8) = 0$$

$$\frac{25}{4}x^2 + 64 + 40x - 2x^2 - 20x - 64 = 0$$

$$\frac{25}{4}x^2 - 2x^2 = 0$$

$$\frac{9x^2}{4} = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

ب- اگر  $c = 0$  باشد، معادله درجه دوم (I شماره ۲) به صورت

ناقص زیر نوشته می‌شود:

$$ax^2 + bx = 0$$

در این معادله از  $x$  فاکتور می‌گیریم و هر يك از عوامل ضرب

را مساوی صفر قرار می‌دهیم. جوابهای معادله بدست می‌آید:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

معمولا جوابها را با علامت  $x'$  و  $x''$  نمایش می‌دهند، پس

می‌توان نوشت:

$$x' = 0$$

$$x'' = -\frac{b}{a}$$

مثال- معادله:  $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} + 1 = 0$  را حل کنید.

$$x(x-1) + (x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - x + x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 + x = 0$$

$$x(3x+1) = 0$$

نتیجه - معادله ناقص درجه دوم  $ax^2+c=0$  وقتی دارای جواب است که  $c$  و  $a$  مختلف‌العلامه باشند.

مثال- معادله:  $2x(x-1)+(x+1)^2=4$  را حل کنید:

$$2x^2-2x+x^2+1+2x-4=0$$

$$3x^2-3=0$$

$a$  و  $c$  مختلف‌العلامه‌اند، معادله جواب دارد:

$$3x^2=3$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

۳- حل معادله کامل درجه دوم:

چون  $a \neq 0$ ، می‌توان طرفین معادله درجه دوم کامل:

$$(I) \quad ax^2+bx+c=0$$

را در  $\frac{b}{2a}$  ضرب کرد:

$$2a^2x^2+2abx+2ac=0$$

دوجمله  $(2a^2x^2+2abx)$  را می‌توان به صورت:  $(\sqrt{2ax}+b)^2-b^2$  نوشت، پس چنین خواهیم داشت:

$$(\sqrt{2ax}+b)^2-b^2+2ac=0$$

$$(II) \quad (\sqrt{2ax}+b)^2=b^2-2ac$$

الف - اگر  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامه باشند،  $ac$  عددی منفی و

$$x^2=0$$

$$2x+1=0$$

$$x''=-\frac{1}{2}$$

ج - اگر  $b=0$  باشد، معادله (I شماره ۲) به صورت ناقص زیر در می‌آید:

$$ax^2+c=0$$

در این معادله از  $a$  فاکتور می‌گیریم:

$$a(x^2+\frac{c}{a})=0$$

چون  $a \neq 0$  است:

$$x^2+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

یا

اگر  $c$  و  $a$  متحد‌العلامه باشند، سمت راست تساوی اخیر منفی

خواهد شد، در نتیجه معادله دارای جواب نخواهد بود (چرا؟).

چنانچه  $c$  و  $a$  مختلف‌العلامه باشند چنین خواهیم داشت:

$$x'=\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ و } x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

یعنی در این حالت معادله ناقص دوریشه قرینه دارد.

$-4ac$  - مثبت است. پس  $b^2 - 4ac$  مثبت می شود.

ممکن است  $a$  و  $c$  متحدالعلامه باشند ولی نتیجه محاسبه  $b^2 - 4ac$  مثبت شود.

در هر صورت وقتی که  $b^2 - 4ac$  مثبت باشد، می توان از طرفین رابطه (II) جذر گرفت:

$$\sqrt{ax+b} = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\sqrt{ax+b} = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

رابطه اخیر را «دستور  $b$ » می نامند و جوابهای معادله (I) به کمک این دستور قابل محاسبه است.

می توان جوابها را جداگانه نوشت:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و}$$

ب - هرگاه  $b^2 - 4ac = 0$  باشد، معادله (II) به صورت:

$$(\sqrt{ax+b})^2 = 0$$

$$(\sqrt{ax+b})(\sqrt{ax+b}) = 0 \quad \text{یا}$$

درمی آید که از صفر قرار دادن عوامل ضرب نتیجه می شود:

$$\begin{cases} x' = -\frac{b}{2a} \\ x'' = -\frac{b}{2a} \end{cases} \quad \text{و}$$

یعنی، معادله (I) ریشه مضاعف  $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$  دارد.

ج - چنانچه  $b^2 - 4ac < 0$  باشد، چون  $(\sqrt{ax+b})^2$  همواره مثبت است، برقراری تساوی (II) غیر ممکن است یا به عبارت دیگر معادله (I) دارای جواب نیست و می گویند ریشه های معادله موهومی است.

از آنچه گفته شد نتایج زیر عاید می شود:

اول - هرگاه  $b^2 - 4ac > 0$  یا  $a$  و  $c$  مختلفالعلامه باشند،

معادله (I) دارای دو جواب متمایز است. به عبارت دیگر، ریشه ها حقیقی و متمایزند.

ثانیا - هرگاه  $b^2 - 4ac = 0$  باشد، معادله (I) دارای دو ریشه مساوی یا ریشه مضاعف است.

ثالثا - هرگاه  $b^2 - 4ac < 0$  باشد، معادله (I) دارای جواب نیست، به عبارت دیگر، ریشه ها موهومی هستند.

تبصره ۱ -  $b^2 - 4ac$  را مبین معادله درجه دوم می نامند و با

حرف یونانی  $\Delta$  (دلتا) نمایش می دهند.

مثال ۱ - معادله درجه دوم:  $۴x^2 - ۵x + ۱ = ۰$  را حل کنید.

$$a = ۴$$

$$b = -۵$$

$$c = ۱$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۱۶}}{۸}$$

$$x = \frac{۵ \pm ۳}{۸}$$

$$x' = \frac{۵+۳}{۸} = ۱$$

$$x'' = \frac{۵-۳}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۲ - معادله درجه دوم:  $۹x^2 + ۶x + ۱ = ۰$  را حل کنید.

$$a = ۹$$

$$b = ۶$$

$$c = ۱$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-۶ \pm \sqrt{۳۶ - ۳۶}}{۱۸}$$

$$x' = \frac{-۶+۰}{۱۸} = -\frac{۱}{۳}$$

$$x'' = \frac{-۶-۰}{۱۸} = -\frac{۱}{۳}$$

مثال ۳ - معادله درجه دوم:  $x^2 - ۳x + ۲ = ۰$  را حل کنید.

$$a = ۱$$

$$b = -۳$$

$$c = ۲$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۲}$$

$$x = \frac{۳ \pm \sqrt{۱}}{۲}$$

چون مین معادله منتهی است، ریشه‌ها موهومی هستند.

تبصره ۲ - اگر ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  برعددی مخالف صفر قابل

قسمت باشند، برای سهولت محاسبه، بهتر است قبل از حل، طرفین

معادله را بر آن عدد تقسیم کنند.

تبصره ۳ - معمولاً وقتی کمترین معادله معجزه کامل نباشد، ریشه‌ها

را به همان صورت با رادیکال می‌نویسند. در برخی ازمسائل می‌توان

باتقریب لازم از رادیکال جذرگرفت.

۵ - دستور  $b'$  - هرگاه  $b$ ، ضریب جمله درجه اول معادله

(I شماره ۲)، زوج باشد یعنی بر ۲ قابل قسمت باشد، معمولاً نصف  $b$  را

$b'$  فرض می‌کنند ( $b' = \frac{b}{۲}$ )؛ با این فرض، دستور  $b$  را می‌توان

چنین نوشت:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-۲b' \pm \sqrt{۴b'^2 - 4ac}}{۲a}$$

دارای دوریشه حقیقی و متمایز باشد، ریشه‌های آن به صورت زیرند:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یک بار ریشه‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x' + x'' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \end{aligned}$$

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}} \quad \text{یا:}$$

یعنی: مجموع ریشه‌های هر معادله درجه دوم، مساوی است با خارج قسمت ضریب جمله درجه اول که با علامت مخالف اختیار شود، بر ضریب جمله درجه دوم.

باردیگر ریشه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x' \cdot x'' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}}$$

این دستور را «دستور b'» می‌نامند.

مثال - مطلوب است حل معادله:  $15x^2 - 34x + 15 = 0$

$$b = -34 \quad b' = -17 \quad a = 15 \quad c = 15$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 225}}{15}$$

$$x = \frac{17 \pm 8}{15}$$

$$x' = \frac{5}{3}$$

$$x'' = \frac{3}{5}$$

چنانچه معادله مفروض را به کمک دستور b حل می‌کردیم باز به همین جوابها می‌رسیدیم.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

۶ - دیدیم که وقتی که معادله درجه دوم کامل:

$$(I) \quad ax^2 + bx + c = 0$$



$$x' \cdot x'' = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}} \quad \text{یا:}$$

یعنی: حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم، مساوی است با خارج قسمت جمله معلوم بر ضریب جمله درجه دوم.

معمولاً مجموع ریشه‌ها را با  $S$  و حاصل ضرب آنها را با  $P$  نمایش می‌دهند:

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \quad \text{و}$$

چنانچه ریشه‌ها را از هم تفریق کنیم چنین خواهیم داشت:

$$|x' - x''| = \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right|$$

$$|x' - x''| = \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right|$$

$$|x' - x''| = \left| \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right|$$

$$\boxed{|x' - x''| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

یعنی: قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله درجه دوم، مساوی است با خارج قسمت جذرمبین معادله بر قدر مطلق ضریب جمله درجه دوم.

مثال ۱ - مجموع و حاصل ضرب و تفاضل ریشه‌های معادله:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

را مستقیماً بدست آورید.

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲ - تحقیق کنید کدام دسته از اعداد:  $(\frac{1}{2} - 1)$  و  $(\frac{1}{2} - 1)$

$(\frac{1}{2} - 1)$  و  $(\frac{1}{2} - 1)$  ریشه‌های معادله زیر است:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{6}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{6}$$

و

مجموع اعداد دسته اول با مجموع ریشه های معادله مفروض مساوی است. اما حاصل ضرب آنها با حاصل ضرب ریشه های معادله یکی نیست. همچنین حاصل ضرب اعداد دسته دوم با حاصل ضرب ریشه ها مساوی است ولی مجموع آنها با مجموع ریشه ها یکی نیست. ولی اعداد دسته سوم جواب معادله اند زیرا:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

مجموع و حاصل ضرب اعداد این دسته با مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله برابر است.

مثال ۳-  $k$  را بطریقی تعیین کنید که یکی از ریشه های معادله:

$$2x^2 - kx + 3 = 0$$

مساوی  $\frac{3}{p}$  باشد.

راه اول - این جواب باید در معادله صدق کند، پس چنین

خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{3}{p}\right)^2 - k\left(\frac{3}{p}\right) + 3 = 0$$

$$\frac{9}{p} - \frac{3k}{p} + 3 = 0$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

راه دوم - ابتدا به کمک حاصل ضرب ریشه ها، ریشه دیگر را

حساب می کنیم. مجموع دو ریشه باید با  $-\frac{b}{a}$  - معادله برابر باشد:

$$x' + x'' = -\frac{c}{a}$$

$$\frac{3}{p} + x'' = -\frac{3}{p}$$

$$x'' = -1$$

بنابراین مجموع ریشه ها ازطرفی چنین می شود:

$$x' + x'' = -1 + \frac{3}{p} = -\frac{p}{p}$$

از طرف دیگر مجموع ریشه های معادله مفروض، برابر

$\left(-\frac{b}{a}\right)$  یعنی  $\frac{k}{p}$  است:

$$x' + x'' = \frac{k}{p}$$

از مقایسه این دو مقدار که برای مجموع ریشه ها پیدا کردیم

نتیجه می شود:

$$\frac{k}{p} = -\frac{p}{p}$$

$$k = -p$$

و از آنجا:

موارد استعمال مجموع و حاصل ضرب ریشه ها

۷- هرگاه طرفین معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  را بر

$a \neq 0$  تقسیم کنیم چنین خواهیم داشت :

$$x' + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x' - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{یا:}$$

اما می دانیم که  $\left(-\frac{b}{a}\right)$  همان  $S$  و  $\frac{c}{a}$  همان  $P$  است ، پس

می توان چنین نوشت :

$$x' - Sx + P = 0$$

$$\text{یا:} \quad \text{حاصل ضرب ریشه ها} + x(\text{مجموع ریشه ها}) - x' = 0$$

**مثال نوع اول : الف - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن اعداد ۲ و ۵ - باشد .**

$$x' = 2$$

$$x'' = -5$$

$$S = x' + x'' = 2 - 5 = -3$$

$$P = x' \cdot x'' = 2(-5) = -10 \quad \text{و}$$

$$x' - Sx + P = 0$$

$$x' + 3x - 10 = 0$$

**ب - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن  $\frac{1}{a-1}$  و  $\frac{1}{a+1}$  باشد :**

$$S = x' + x'' = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{1}{a-1} \times \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a^2-1}$$

پس معادله مطلوب چنین می شود :

$$x' - \frac{2a}{a^2-1}x + \frac{1}{a^2-1} = 0$$

$$(a^2-1)x' - 2ax + 1 = 0 \quad \text{یا}$$

**مثال نوع دوم : الف - مجموع دو عدد ۱۲ و حاصل ضرب آنها ۲۰ است . آن دو عدد را پیدا کنید .**

دو عدد مطلوب را دو ریشه يك معادله درجه دوم فرض می کنیم ، پس :

$$S = 12$$

$$P = 20$$

$$x' - Sx + P = 0$$

$$x' - 12x + 20 = 0$$

از حل این معادله درجه دوم ، آن دو عدد بدست می آید:

$$x = 6 \pm \sqrt{36-20}$$

$$x' = 6 + 4 = 10$$

$$x'' = 6 - 4 = 2$$

پس آن دو عدد ۲ و ۱۰ است .

**ب - مجموع دو عدد ۲ و حاصل ضرب آنها  $(-1)$  است . آن**

دو عدد را پیدا کنید .

$$S=2$$

$$P=-1$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x' = 1 + \sqrt{2}$$

$$x'' = 1 - \sqrt{2}$$

### بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

۸- دیدیم که معادله درجه دوم وقتی دارای دو جواب حقیقی

است که  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامه باشند و چنانچه  $a$  و  $c$  متحد‌العلامه باشند شرط وجود دو جواب حقیقی این است که  $\Delta > 0$  باشد. در حالت  $\Delta = 0$  دو ریشه معادله متساوی و در حالت  $\Delta < 0$  ریشه‌ها موهومی هستند.

با یادآوری مطالب بالا برای بحث در باره وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم (بدون حل کردن آن) سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

حالت اول :  $\frac{c}{a} < 0$

در این حالت به علت مثبت بودن  $\Delta$  (شماره ۴ - بند الف) ، معادله دارای دو ریشه حقیقی است و چون  $\frac{c}{a}$  یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است ، معلوم می‌شود دو ریشه مختلف‌العلامه اند (یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است) .

حال اگر مجموع ریشه‌ها یعنی  $(-\frac{b}{a})$  مثبت باشد، نتیجه می‌گیریم که قدر مطلق ریشه مثبت بیشتر از قدر مطلق ریشه منفی است و چنانچه  $(-\frac{b}{a})$  منفی باشد، معلوم می‌شود قدر مطلق ریشه منفی بیشتر از قدر مطلق ریشه مثبت است و بالاخره هرگاه  $(-\frac{b}{a})$  برابر صفر باشد، دو ریشه قرینه یکدیگر خواهند بود .

حالت دوم :  $\frac{c}{a} > 0$

در این حالت بدون تشکیل  $\Delta$  نمی‌توان وجود ریشه‌ها را قطعی دانست و باید  $\Delta = b^2 - 4ac$  را تشکیل داد :

الف :  $b^2 - 4ac > 0$

در این صورت معادله دارای دو ریشه حقیقی است و چون  $\frac{c}{a}$  یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت است معلوم می‌شود دو ریشه متحد‌العلامه اند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) و علامت مشترک دو ریشه همان علامت مجموعشان، یعنی علامت  $(-\frac{b}{a})$  است .

$$b^2 - 4ac = 0 : \text{ب}$$

در این صورت معادله دارای دو ریشه متساوی (ریشه مضاعف) است و مقدار مشترک دو ریشه برابر  $(-\frac{b}{2a})$  و علامت آنها همان علامت  $(-\frac{b}{2a})$  یا علامت  $(-\frac{b}{a})$  است.

$$b^2 - 4ac < 0 : \text{ج}$$

در این صورت معادله جواب ندارد.

$$\frac{c}{a} = 0 : \text{حالت سوم}$$

در این حالت چون حاصل ضرب ریشه‌ها برابر صفر است، لااقل یکی از ریشه‌ها برابر صفر خواهد بود و در نتیجه مقدار ریشه دیگر برابر است با مجموع ریشه‌ها یعنی  $(-\frac{b}{a})$  و علامتش نیز همان علامت  $(-\frac{b}{a})$  است.

مثال ۱- وجود و علامت ریشه‌های معادله:

$$2x^2 - 7x - 6 = 0$$

را پیش‌بینی کنید.

چون  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامه‌اند، معادله دو ریشه متمایز دارد یا چون:

$$\Delta = 49 + 48 = 97 > 0$$

دو ریشه متمایز است.

$$\frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3 < 0$$

چون  $\frac{c}{a} < 0$ ، دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

$$-\frac{b}{a} = \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2} > 0$$

چون  $-\frac{b}{a} > 0$ ، قدرمطلق ریشه مثبت از قدر مطلق ریشه منفی

بیشتر است.

مثال ۲- وجود و علامت ریشه‌های معادله:

$$3x^2 - 3 = 0$$

را پیش‌بینی کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 48 = 48 > 0$$

چون  $\Delta > 0$ ، دو ریشه متمایزند.

$$\frac{c}{a} = \frac{-3}{3} < 0$$

چون  $\frac{c}{a} < 0$ ، دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

$$\frac{-b}{a} = \frac{0}{3} = 0$$

چون  $\frac{-b}{a} = 0$ ، دو ریشه قرینه‌اند.

مثال ۳- وجود و علامت ریشه‌های معادله:

$$2x^2 - 7x + 4 = 0$$

را پیش بینی کنید.

$$\Delta = 49 - 32 = 17 > 0$$

چون  $\Delta > 0$ ، معادله دارای دو ریشه متمایز است.

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 0$$

چون  $\frac{c}{a} > 0$ ، دو ریشه متحدالعلامه اند.

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2} > 0$$

چون  $-\frac{b}{a} > 0$ ، دو ریشه مثبتند.

مثال ۳- وجود و علامت ریشه‌های معادله:

$$5x^2 + 6x + 1 = 0$$

را پیش بینی کنید.

$$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$$

چون  $\Delta > 0$ ، معادله دارای دو ریشه متمایز است.

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{5} > 0$$

چون  $\frac{c}{a} > 0$ ، دو ریشه متحدالعلامه اند.

$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{5} < 0$$

چون  $-\frac{b}{a} < 0$ ، دو ریشه متفی است.

مثال ۵- وجود و علامت ریشه‌های معادله:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

را پیش بینی کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

چون  $\Delta = 0$ ، معادله ریشه مضاعف دارد.

$$-\frac{b}{a} = \frac{4}{4} = 1 > 0$$

چون  $-\frac{b}{a} > 0$ ، ریشه مضاعف مثبت و مقدارش چنین است:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

بحث فوق را به صورت جدول زیر می توان خلاصه کرد :

$\frac{c}{a} < 0$	$-\frac{b}{a} > 0$	قدرمطلق ریشه مثبت بیشتر از قدرمطلق ریشه منفی است ،
	$-\frac{b}{a} < 0$	قدرمطلق ریشه منفی بیشتر از قدرمطلق ریشه مثبت است ،
	$-\frac{b}{a} = 0$	دو ریشه قرینه یکدیگرند .
$\frac{c}{a} > 0$	$b^2 - 4ac > 0$	دو ریشه مثبتند .
	$b^2 - 4ac < 0$	دو ریشه منفینند .
	$b^2 - 4ac = 0$	دو ریشه متضاد مثبت است .
$\frac{c}{a} = 0$	$b^2 - 4ac > 0$	دو ریشه مساوی
	$b^2 - 4ac < 0$	دو ریشه متضاد منفی است .
	$b^2 - 4ac = 0$	دو ریشه مساوی
$\frac{c}{a} < 0$	$-\frac{b}{a} > 0$	دو ریشه متضاد مثبت است .
	$-\frac{b}{a} < 0$	دو ریشه متضاد منفی است .
	$-\frac{b}{a} = 0$	دو ریشه متضاد منفی است .
$\frac{c}{a} = 0$	$-\frac{b}{a} > 0$	دو ریشه متضاد مثبت است .
	$-\frac{b}{a} < 0$	دو ریشه متضاد منفی است .
	$-\frac{b}{a} = 0$	دو ریشه متضاد منفی است .

۹ - معادله درجه دوم پارامتری - تعیین رابطه مستقل از پارامتر بین ریشه های معادله درجه دوم - با توجه به مطالبی که ضمن ( شماره ۱ فصل سوم ) در باره ضرایب حرفی یا پارامتری یک معادله گفته شد ، در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  ممکن است ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  یا لااقل یکی از آنها شامل یک یا چند مقدار حرفی باشند ؛ به عبارت دیگر ، ممکن است ضریب های یک معادله درجه دوم یا لااقل یکی از این ضرایب به یک یا چند پارامتر بستگی داشته باشند ؛ این قبیل معادلات را معادلات درجه دوم پارامتری می نامند ؛ بدیهی است که در این نوع معادلات مقدار  $x'$  و  $x''$  ، ریشه های معادله ( به فرض موجود بودن ) ، عموماً به مقدار پارامتر ( یا پارامترهای ) موجود در معادله بستگی خواهد داشت و در نتیجه با تغییر مقدار پارامتر ، مقدار ریشه ها تغییر خواهد کرد ؛ مثلاً در معادله درجه دوم پارامتری :

$$(1) \quad mx^2 + 2(m-1)x + m-4 = 0$$

اگر مقدار پارامتر  $m$  را  $\frac{3}{4}$  بگیریم ( $m = \frac{3}{4}$ ) معادله (۱) به صورت زیر درمی آید :

$$(2) \quad 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

و ریشه های معادله (۲) عبارتند از :  $x' = 1$  و  $x'' = -\frac{5}{3}$

و اگر مقدار پارامتر  $m$  را برابر  $(-\frac{1}{8})$  بگیریم معادله (۱) به

این صورت در می آید :

$$(3) \quad x^2 + 18x + 22 = 0$$

و ریشه های معادله (۳) عبارتند از :

$$x' = -9 + 4\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x'' = -9 - 4\sqrt{3}$$

بطوری که ملاحظه می کنید ریشه های معادله (۱) با تغییر مقدار پارامتر  $m$  تغییر می کند؛ معیناً، عموماً با حذف يك پارامتر مفروض بین دو رابطه:

$$(E) \quad \begin{cases} x' + x'' = -\frac{b}{a} \\ x'x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$$

می توان بین  $x'$  و  $x''$  ریشه های معادله درجه دوم:  $ax^2 + bx + c = 0$  رابطه ای مستقل از این پارامتر (یعنی رابطه ای که بستگی به پارامتر مورد نظر نداشته باشد) تعیین کرد.

مثلاً برای اینکه بین  $x'$  و  $x''$  ریشه های معادله (۱) رابطه ای مستقل از پارامتر  $m$  تعیین کنیم ابتدا روابط (E) را برای معادله (۱) تشکیل می دهیم، یعنی صورت کلی مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله (۱) را به شکل زیر می نویسیم:

$$(E') \quad \begin{cases} x' + x'' = -\frac{\gamma(m-1)}{m} \\ x'x'' = \frac{m-4}{m} \end{cases}$$

حال پارامتر  $m$  را بین روابط دستگاه (E') حذف می کنیم؛ و برای این منظور از رابطه دوم دستگاه (E') مقدار  $m$  را بر حسب  $x'$  و  $x''$  حساب می کنیم و این مقدار  $m$  را در رابطه اول دستگاه (E') قرار می دهیم:

$$mx'x'' = m - 4$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{4}{1 - x'x''} \\ x' + x'' &= \frac{-\gamma m + \gamma}{m} = \frac{-\gamma}{1 - x'x''} + \gamma = \frac{-\gamma}{1 - x'x''} \\ &= \frac{-\gamma + \gamma - \gamma x'x''}{1} = \frac{-\gamma - \gamma x'x''}{1} \\ x' + x'' &= \frac{-\gamma - \gamma x'x''}{1} \\ \boxed{\gamma(x' + x'') + x'x'' + \gamma = 0} \end{aligned}$$

این رابطه مستقل از  $m$  است که بین ریشه های معادله (۱) برقرار است.

تبصره - اگر یکی از روابط دستگاه (E) مستقل از پارامتر مورد نظر باشد همان رابطه جواب مسئله خواهد بود.

۱۰ - محاسبه عباراتی که بر حسب ریشه های معادله درجه دوم متقارنند:

عباراتی نظیر  $x' + x''$  و  $x' \cdot x''$  و  $x'^2 + x''^2$  و ..... و  $x'^n + x''^n$  یا نظایر آنها را بر حسب  $x'$  و  $x''$  متقارن گویند، هر گاه با تبدیل  $x'$  به  $x''$  و  $x''$  به  $x'$ ، آن عبارت تغییر نکند.

می دانیم  $x' + x'' = -\frac{b}{a}$  و  $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$  است.

مجموع توانهای  $n$  ام ریشه ها را با  $S_n$  نمایش می دهند. به این ترتیب:



$$S_1 = x'^1 + x''^1$$

$$S_n = x'^n + x''^n \quad \text{و}$$

$$S_{-r} = x'^{-r} + x''^{-r} = \frac{1}{x'^r} + \frac{1}{x''^r} \quad \text{و}$$

خواهد بود .

۱۱ - محاسبه  $S_n$  - فرض می کنیم  $x'$  و  $x''$  ریشه های معادله

درجه دوم :  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد . پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} ax'^2 + bx' + c = 0 \\ ax''^2 + bx'' + c = 0 \end{cases}$$

طرفین رابطه اول را در  $x'^{n-2}$  و رابطه دوم را در  $x''^{n-2}$  ضرب می کنیم

$$\begin{cases} ax'^n + bx'^{n-1} + cx'^{n-2} = 0 \\ ax''^n + bx''^{n-1} + cx''^{n-2} = 0 \end{cases}$$

این دو رابطه را عضو بعضو با هم جمع می کنیم و از  $a$  و  $b$  و  $c$  در هر دسته فاکتور می گیریم، نتیجه عمل چنین خواهد بود :

$$(I) \quad a(x'^n + x''^n) + b(x'^{n-1} + x''^{n-1}) + c(x'^{n-2} + x''^{n-2}) = 0$$

اما طبق قرارداد :

$$x'^n + x''^n = S_n$$

$$x'^{n-1} + x''^{n-1} = S_{n-1} \quad \text{و}$$

$$x'^{n-2} + x''^{n-2} = S_{n-2} \quad \text{و}$$

بنابراین رابطه (I) را به صورت رابطه (II) می توان نوشت:

$$(II) \quad aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$$

به کمک دستور (II) با معلوم بودن  $S_{n-1}$  و  $S_{n-2}$  می توان  $S_n$  را حساب کرد .

مثال ۱ - مجموع مربعات ریشه های معادله درجه دوم کامل را حساب کنید .

راه حل اول - مقصود محاسبه  $S_2 = x'^2 + x''^2$  است که در آن  $n=2$  است، پس دستور (II) به صورت زیر نوشته می شود :

$$aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0$$

$$S_0 = x'^0 + x''^0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{اما}$$

$$S_1 = x'^1 + x''^1 = -\frac{b}{a} \quad \text{و}$$

$$aS_2 + b\left(-\frac{b}{a}\right) + c \times 2 = 0 \quad \text{پس}$$

$$S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \quad \text{و از آنجا :}$$

راه حل دوم - برای محاسبه  $S_2 = x'^2 + x''^2$  به طرفین همین رابطه  $2x'x''$  اضافه می کنیم:

$$S_2 + 2x'x'' = x'^2 + x''^2 + 2x'x''$$

$$S_2 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = \left(-\frac{b}{a}\right)^2$$

$$S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

مثال ۲- مجموع مکعبات ریشه‌های معادله درجه دوم کامل را

حساب کنید.

راه اول - در دستور  $aS_r + bS_r + cS_1 = 0$  به جای  $S_1$  و  $S_r$

مقادیرشان را قرار می‌دهیم  $S_r$  بدست می‌آید:

$$aS_r + b\left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right) + c\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

$$S_r = \frac{4abc - b^2}{a^2}$$

راه دوم - به طرفین رابطه  $S_r = x'^2 + x''^2$  باید عبارت:

$$3x'^2x'' + 3x'x''^2$$

را اضافه کرد تا سمت راست رابطه به صورت اتحاد نوشته شود.

$$S_r + 3x'^2x'' + 3x'x''^2 = x'^2 + x''^2 + 3x'^2x'' + 3x'x''^2$$

$$S_r + 3x'x''(x' + x'') = (x' + x'')^3$$

$$S_r + 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$S_r = \frac{4abc - b^2}{a^2}$$

مثال ۳- در معادله درجه دوم  $x^2 - 5x + 4 = 0$  ابتدا  $S_1$  سپس

$S_{-2}$  را حساب کنید.

$$S_0 = 2$$

$$S_1 = -\frac{b}{a} = 5$$

$$aS_r + bS_1 + cS_0 = 0$$

$$S_r - 25 + 4 = 0$$

$$S_r = 19$$

اکنون به کمک  $S_1$  و  $S_r$  می‌توان  $S_{-2}$  را حساب کرد:

$$aS_r + bS_r + cS_1 = 0$$

$$S_r - 19 + 20 = 0$$

$$S_r = 1$$

حال به کمک  $S_r$  و  $S_{-2}$  مقدار  $S_{-4}$  را حساب می‌کنیم:

$$aS_r + bS_r + cS_1 = 0$$

$$S_r - 225 + 48 = 0$$

$$S_r = 257$$

محاسبه  $S_{-4}$ :

$$S_{-4} = x'^4 - 4x'^2x''^2 + x''^4 = \frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} = \frac{x'^4 + x''^4}{(x'x'')^4}$$

$$S_{-4} = \frac{S_r}{\left(\frac{c}{a}\right)^4} = \frac{a^4 S_r}{c^4} \quad \text{یا}$$

$$S_{-4} = \frac{257}{256}$$

$$\frac{\Delta x + 4}{\Delta x - 4} + \frac{\Delta x - 4}{\Delta x + 4} = \frac{12}{9}$$

-۲۸

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}$$

-۲۹

$$\frac{\Delta}{4(x-2)} - \frac{2}{x+3} = \frac{\Delta}{11-3x}$$

-۳۰

$$\frac{x+5}{x-7} + \frac{x-9}{x+3} = \frac{19}{x-7}$$

-۳۱

$$\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} = \frac{\Delta x^2}{6} + 3x - \frac{493}{8}$$

-۳۲

$$\frac{x}{2} - \frac{2(2x-3)}{2(x-1)} + \frac{3x-1}{2(x-1)} = \frac{2(x^2+2)}{2(2x-2)}$$

-۳۳

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6}$$

-۳۴

معادلات حرفی زیر را حل کنید :

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

-۳۵

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

-۳۶

$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$$

-۳۷

$$x^2 - 2bx + 2b^2 - a^2 = 0$$

-۳۸

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - 1 = 0$$

-۳۹

$$abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$$

-۴۰

$$12abx^2 - (16a^2 - 9b^2)x - 12ab = 0$$

-۴۱

$$\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)} = x$$

-۴۲

$$4a^2x = (a^2 - b^2 + x)^2$$

-۴۳

تمرین :

معادلات زیر را حل کنید :

$$x^2 - 16 = 0$$

-۲

$$x^2 - 6x = 0$$

-۱

$$4x^2 + 25 = 0$$

-۴

$$x^2 + 8x = 0$$

-۳

$$2x^2 + 24 = 0$$

-۶

$$x^2 - 8 = 0$$

-۵

$$\frac{\Delta}{x} = \frac{x}{\Delta}$$

-۸

$$x^2 = 9$$

-۷

$$2x^2 + 24x + 21 = 0$$

-۱۰

$$(x+2)(x+3) = 6$$

-۹

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

-۱۲

$$25x(x+1) = -4$$

-۱۱

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

-۱۴

$$4x^2 + 5x - 44 = 0$$

-۱۳

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

-۱۶

$$x^2 - 8x - 15 = 0$$

-۱۵

$$(2x-3)^2 = 8x$$

-۱۸

$$4(x^2-1) = 4x-1$$

-۱۷

$$x + \frac{1}{x-2} = 5$$

-۲۰

$$\frac{9}{x} - \frac{x}{2} = 0$$

-۱۹

$$x^2 - 5\Delta x + 7/29 = 0$$

-۲۳

$$\frac{x-2}{3} = \frac{1}{4(x-2)}$$

-۲۱

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$$

-۲۴

$$y^2 - 2y/2+1 = 0$$

-۲۳

$$\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$$

-۲۶

$$\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$$

-۲۵

$$x + \frac{24}{x-1} = 2x-4$$

-۲۷

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن اعداد زیر باشند:

- $(۳ و -۴)$  -۶۵  $(۲ و -۵/۲)$  -۶۵  
 $(\sqrt{۲} و \sqrt{-۲})$  -۶۸  $(۲-\sqrt{۲} و ۳+\sqrt{۲})$  -۶۷  
 $(-۷ و -۲)$  -۷۰  $(۳ و \frac{1}{۲})$  -۶۹  
 $a+b و a-b$  -۷۳  $(a+b و \frac{1}{a+b})$  -۷۱  
 $(\frac{1}{a+b} و \frac{1}{a-b})$  -۷۴  $(\frac{a+b}{a-b} و \frac{a-b}{a+b})$  -۷۳  
 $(a و \frac{1}{a})$  -۷۶  $(۱ و -۱)$  -۷۵  
 $(۲+\frac{۲}{\sqrt{۵}} و ۲-\frac{۲}{\sqrt{۵}})$  -۷۸  $(a+\sqrt{b} و a-\sqrt{b})$  -۷۷

S و P ، مجموع و حاصل ضرب دوعدد معلوم است: آن دوعدد را در

هریک از حالات زیر پیدا کنید :

- $S=۲۸ و P=۱۹۵$  -۷۹  
 $S=۱۸ و P=۴۵$  -۸۰  
 $S=۱۴ و P=۴۹$  -۸۱  
 $S=۴ و P=-۱۲$  -۸۲  
 $S=-۱۰ و P=۱۶$  -۸۳  
 $S=۲\sqrt{۲} و P=۱$  -۸۴  
 $S=۲a و P=a^۲-b^۲$  -۸۵  
 $S=\frac{a^۲+b^۲}{ab} و P=۱$  -۸۶

$$\frac{(a-x)^۲-(x-b)^۲}{(a-x)(x-b)} = \frac{۲ab}{a^۲-b^۲} \quad -۴۴$$

$$m^۲x^۲-(m-n)x-۱=n^۲x^۲+(m-n)x-۲m \neq n \quad -۴۵$$

$$\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = a-۱ \quad -۴۶$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x} \quad -۴۷$$

$$x^۲+x+۱ = \frac{۴۲}{x^۲+x} \quad -۴۸$$

$$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^۲ = \frac{۱}{\left(\frac{a-x}{x-b}\right)} \quad -۴۹$$

$$\frac{x-۱}{۲x-۱} + \frac{(۲x+۱)}{x-۱} = m \quad -۵۰$$

تعیین کنید کدامیک از معادلات زیر دارای جوابند . سپس مجموع و

حاصل ضرب و تفاضل ریشه ها و همچنین علامت ریشه ها را معین کنید :

$$۲x^۲-۶x+۴=۰ \quad -۵۲ \quad x^۲-۹x-۱۰=۰ \quad -۵۱$$

$$۱-x-x^۲=۰ \quad -۵۳ \quad ۴x^۲-۴x+۱=۰ \quad -۵۴$$

$$۵x^۲+۱۰x+۵=۰ \quad -۵۶ \quad ۲x^۲-۵x-۲۲=۰ \quad -۵۵$$

$$۲x^۲+۱۲=۰ \quad -۵۸ \quad ۹x^۲-۶x+۱=۰ \quad -۵۷$$

$$۵x^۲-x+۱=۰ \quad -۶۰ \quad ۷x^۲-۶x-۱=۰ \quad -۵۹$$

$$۲x^۲+x+۲=۰ \quad -۶۲ \quad ۶x^۲-x-۵=۰ \quad -۶۱$$

$$۲x^۲+x+۸=۰ \quad -۶۴ \quad ۷x^۲+۷x+\frac{۷}{۴}=۰ \quad -۶۳$$

به ازای چه مقادیر  $m$  یکی از ریشه‌های معادلات زیر سفاست؟ پس از تعیین  $m$  ریشه دیگر را پیدا کنید :

$$۶x^2 + ۵mx - ۳m^2 + ۳ = ۰ \quad -۸۷$$

$$-۳x^2 + ۶x - m^2 + ۳ = ۰ \quad -۸۸$$

$$x^2 + ۱۰x + m^2 + ۳ = ۰ \quad -۸۹$$

$$۱۰x^2 - ۵x + ۳m^2 - ۸m + ۴ = ۰ \quad -۹۰$$

به ازای چه مقادیر  $m$  یکی از ریشه‌های معادلات زیر  $(-۲)$  است؟ سپس ریشه دیگر را پیدا کنید :

$$x^2 - ۲mx + ۳ = ۰ \quad -۹۱$$

$$mx^2 - x + ۳m^2 - ۱ = ۰ \quad -۹۲$$

$$m^2x^2 + ۶x = m^2 - ۱۶ \quad -۹۳$$

$$mx^2 + ۲mx - ۳ = ۰ \quad -۹۴$$

$$۱۰x^2 - ۷mx + m^2 + ۹ = ۰ \quad -۹۵$$

به ازای چه مقادیر  $b$  و  $a$  هر دو ریشه معادلات زیر صفر می‌شوند:

$$۵x^2 + ax + b - ۵ = x \quad -۹۶$$

$$x^2 + (۳a - b)x + a^2 - ۴ = ۰ \quad -۹۷$$

$$۲x^2 + (a^2 - ۱)x + b^2 = ۰ \quad -۹۸$$

$$x^2 + (a^2 + ۲b + ۲)x + (۴b - ۶a) = ۰ \quad -۹۹$$

$$x^2 + (a^2 + b^2 - ۵)x + a + b + ۱ = ۰ \quad -۱۰۰$$

به ازای چه مقادیر  $m$  معادلات زیر ریشه مضاعف خواهند داشت :

$$mx^2 - ۳x - ۱ = ۰ \quad -۱۰۱ \quad x^2 - mx + ۹ = ۰ \quad -۱۰۲$$

$$۲mx^2 + ۳mx + ۱۲ = ۰ \quad -۱۰۳ \quad ۲x^2 + mx - ۱ = ۰ \quad -۱۰۴$$

$$(m+۲)x^2 - ۲mx + ۱ = ۰ \quad -۱۰۵$$

$$(m^2+۴)x^2 + ۳x + ۲ = ۰ \quad -۱۰۶$$

$$x^2 + (m-۳)x + ۱ = ۰ \quad -۱۰۷$$

$m - ۱۰۸$  را چنان تعیین کنید که معادله  $۳x^2 + ۲۰x + m = ۰$  ریشه مضاعف داشته باشد و ریشه را پیدا کنید .

$m - ۱۰۹$  را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله :

$$x^2 - ۱۵x + m = ۰, \quad \text{رابطه } ۲x' = ۳x'' \text{ برقرار باشد .}$$

$k - ۱۱۰$  را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله :

$$x^2 - kx + ۳۶ = ۰, \quad \text{اولا رابطه } x' = x'', \text{ ثانیاً رابطه } x' = -x'' \text{ برقرار باشد .}$$

ثالثاً رابطه  $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$  برقرار باشد . در هر حالت ریشه‌ها را حساب کنید .

$k - ۱۱۱$  را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله :

$$x^2 - ۸x + k = ۰, \quad \text{اولا رابطه } x' = x'', \text{ ثانیاً رابطه } ۳x' = x'', \text{ ثالثاً}$$

رابطه  $x' = \frac{1}{x''}$  برقرار باشد ، رابطه  $x' = -\frac{1}{x''}$  برقرار باشد . در هر حالت ریشه‌ها را تعیین کنید .

$k - ۱۱۲$  را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم:  $۴x^2 - ۱۵x + k = ۰$  مربع دیگری باشد .

$k - ۱۱۳$  را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات ریشه‌های معادله :  $x^2 - ۵x + k = ۰$  برابر ۱۳ شود .

$k - ۱۱۴$  را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله :

$$۳x^2 - kx + ۲ = ۰, \quad \text{رابطه } ۳x'x'' = ۲x' - ۲x'' \text{ برقرار باشد .}$$

$k - ۱۱۵$  در معادله  $۳x^2 - ۱۰x + k = ۰$  را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۲ باشد .

۱۱۶ -  $k$  را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله :

$$x^2 - (k-1)x + k - 7 = 0 \quad 1) \text{ مساوی ، ثانیاً قرینه ، ثالثاً } \\ \text{عکس یکدیگر باشند . ضمناً رابطه مستقی از } k \text{ بین ریشه‌های معادله پیدا کنید .}$$

۱۱۷ - رابطه مستقی از  $m$  بین ریشه‌های معادله درجه دوم زیر پیدا کنید :

$$(3-m)x^2 - (5+4m)x + m - 2 = 0$$

۱۱۸ - معادله درجه دومی بنویسید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد :

$$\begin{cases} x'^2 + x''^2 = 5 \\ x'x'' = 2 \end{cases} \quad \text{الف -}$$

$$\begin{cases} x'x'' + x' + x'' - m = 0 \\ x'x'' - m(x' + x'') + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ب -}$$

$$\begin{cases} x'x''^2 + x''x'^2 = 6 \\ x' + x'' = 3 \end{cases} \quad \text{ج -}$$

۱۱۹ - مجموع مجذورات و مکعبات ریشه‌های معادله درجه دوم :

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \text{ را پیدا کنید .}$$

۱۲۰ -  $m$  را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات ریشه‌های معادله :

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0 \text{ مساوی } 25 \text{ شود و ریشه‌های معادله } \\ \text{رابطه ازای این مقدار } m \text{ بدست آورید .}$$

۱۲۱ - ضرایب  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تفاضل ریشه‌های

$$\text{معادله } x^2 + ax + b = 0 \text{ مساوی } 4 \text{ و تفاضل مکعبات ریشه‌ها مساوی } 208 \text{ شود .}$$

۱۲۲ - معادله درجه دوم  $x^2 - mx - 2 = 0$  مفروض است .

اولاً - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینه ریشه‌های معادله فوق باشد .

ثانیاً - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله فوق باشد .

ثالثاً - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن دو برابر ریشه‌های معادله فوق باشد .

رابطاً - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن دو واحد بیش از ریشه‌های معادله فوق باشد .

۱۲۳ - معادله درجه دوم :  $(2m-1)x^2 + 2(1-m)x + 3m = 0$  مفروض است .  $m$  را چنان تعیین کنید که :

اولاً - يك ریشه معادله برابر  $(-1)$  باشد .

ثانیاً - مجموع مربعات ریشه‌ها ، مساوی ۴ باشد .

$$(I) \quad ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \quad \text{یا}$$

الف - اگر  $b^2 - 4ac$  یعنی مین سه جمله ای درجه دوم منفی

باشد، چون  $4a^2$  همواره مثبت است، پس کسر  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  منفی

می شود و در نتیجه  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  مثبت خواهد شد؛ بعلاوه مقدار:

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

همیشه مثبت است، پس عبارت داخل کروشه طرف دوم رابطه (I)،

مجموع دو مقدار مثبت است و در این حالت نمی توان سه جمله ای را تجزیه کرد.

ب - اگر  $b^2 - 4ac = 0$  باشد، کسر  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  صفر می شود

در نتیجه رابطه (I) به صورت زیر در می آید:

$$(II) \quad ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

اما وقتی  $b^2 - 4ac = 0$  باشد، ریشه مضاعف معادله:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

عبارت است از:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

پس رابطه (II) را می توان چنین نوشت:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a(x - x')^2$$

تجزیه سه جمله ای درجه دوم - علامت سه جمله ای درجه دوم -

نامعادله های درجه دوم

I - تجزیه سه جمله ای درجه دوم به حاصل ضرب عاملهای

درجه اول

۱ - صورت کلی سه جمله ای درجه دوم چنین است:

$$ax^2 + bx + c$$

می خواهیم این عبارت را به حاصل ضرب دو پرانتز که هر یک

شامل عبارتی درجه اول بر حسب  $x$  باشد تجزیه کنیم.

چون  $a \neq 0$ ، می توان از  $a$  فاکتور گرفت:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

اگر به عبارت داخل پرانتز، جمله  $-\frac{b^2}{4a^2}$  را اضافه و همین جمله

را از آن کم کنیم، مقدار داخل پرانتز تغییر نمی کند:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

یعنی: در حالت  $\Delta = 0$  سه جمله ای درجه دوم تجزیه می شود.

ج- اگر  $b^2 - 4ac > 0$  باشد. کسر  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  مثبت است

و می توان آن را مساوی  $k^2$  فرض کرد. پس:

$$k = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

با این فرض، رابطه (I) را می توان چنین نوشت:

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - k^2 \right]$$

عبارت داخل کروشه را می توان تجزیه کرد:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} + k \right) \left( x + \frac{b}{2a} - k \right)$$

$$ax^2 + bx + c = a \left[ x - \left( -\frac{b}{2a} - k \right) \right] \left[ x - \left( -\frac{b}{2a} + k \right) \right] \quad \text{یا}$$

در طرف دوم رابطه اخیر، به جای  $k$  مقدارش را قرار می دهیم.

$$ax^2 + bx + c =$$

$$a \left[ x - \left( -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \left[ x - \left( -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] =$$

$$a \left[ x - \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \left[ x - \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right]$$

کسرهای داخل دو کروشه اخیر، همان  $x'$  و  $x''$  ریشه های

معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  هستند و با توجه به این معنی، صورت نهایی سه جمله ای درجه دوم در این حالت چنین خواهد بود:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

از آنچه گفته شد نتیجه می گیریم که:

اولاً- هرگاه  $\Delta = 0$  باشد، سه جمله ای درجه دوم به صورت:

$$a(x - x')^2$$

تجزیه می شود.

ثانیاً- هرگاه  $\Delta > 0$  باشد، سه جمله ای درجه دوم به صورت:

$$a(x - x')(x - x'')$$

تجزیه می شود.

ثالثاً- هرگاه  $\Delta < 0$  باشد، سه جمله ای درجه دوم تجزیه

نخواهد شد.

مثال ۱- عبارت  $2x^2 - 7x + 3$  را به حاصل ضرب عوامل تجزیه

کنید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25 > 0$$

پس سه جمله ای تجزیه می شود. لازم است سه جمله ای را مساوی

صفر قرار دهیم و ریشه های آن را بدست آوریم:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x' = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$



$$x'' = \frac{7+5}{4} = 3$$

پس سهجمله‌ای مفروض به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$$

مثال ۲ - سهجمله‌ای :  $2x^2 + 4x - 1$  را تجزیه کنید .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

چون  $\Delta = 0$  است ، سهجمله‌ای به صورت :  $a(x + \frac{b}{2a})^2$

تجزیه می‌شود :

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x - 1 &= -2(x + \frac{3}{-2})^2 = -2(x - \frac{1}{2})^2 \\ &= -(2x - 1)^2 \end{aligned}$$

مثال ۳ - سهجمله‌ای :  $5x^2 - 6x + 7$  را تجزیه کنید .

چون مبین سهجمله‌ای منفی است ، سهجمله‌ای تجزیه نمی‌شود.

۳ - ساده کردن کسرها - چنانچه صورت ومخرج کسری تجزیه

پذیر باشد ، می‌توان هر يك را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد ،

سپس با حذف عوامل مشترك از صورت ومخرج ، کسر را ساده یا غیرممکن-

التحويل کرد .

مثال - کسر  $\frac{2x^2 - 5x - 6}{2x^2 + 7x + 3}$  را ساده کنید .

$$2x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4}$$

$$x' = -\frac{3}{2}$$

$$x'' = 2$$

حاصل تجزیه صورت :  $2(x + \frac{3}{2})(x - 2)$  :  $2x^2 - 5x - 6 = 2(x + \frac{3}{2})(x - 2)$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x' = -1$$

$$x'' = -\frac{3}{2}$$

حاصل تجزیه مخرج :  $2(x + \frac{3}{2})(x + 1)$  :  $2x^2 + 7x + 3 = 2(x + \frac{3}{2})(x + 1)$

$$\frac{2x^2 - 5x - 6}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{2(x + \frac{3}{2})(x - 2)}{2(x + \frac{3}{2})(x + 1)} = \frac{x - 2}{x + 1}$$

II - تعیین علامت سهجمله‌ای درجه دوم :

۳ - سهجمله‌ای درجه دوم  $2x^2 - 5x - 6$  را در نظر می‌گیریم.

حاصل این سهجمله‌ای به ازای جمیع مقادیر  $x$  که کوچکتر از  $(-3)$

باشد)، (از ۳ تا  $-\infty$ ) و همچنین به ازای کلیه مقادیر  $x$  که بزرگتر از (+۸) باشند، (از ۸ تا  $+\infty$ )، همواره مثبت است. بطور مثال دوعدد (۶-) و ۱۰ را امتحان می‌کنیم.

حاصل سه‌جمله‌ای به ازای  $x = -6$ :

$$x^2 - 5x - 24 = (-6)^2 - 5(-6) - 24 = 42$$

حاصل سه‌جمله‌ای به ازای  $x = 10$ :

$$x^2 - 5x - 24 = 10^2 - 5 \times 10 - 24 = 26$$

حاصل همین سه‌جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر  $x$  واقع بین

(۸+ و ۳-) منفی است، مثلاً:

حاصل سه‌جمله‌ای به ازای  $x = -1$  و  $x = 7$  بترتیب چنین

می‌شود:

$$x^2 - 5x - 24 = (-1)^2 - 5(-1) - 24 = -18$$

$$x^2 - 5x - 24 = 7^2 - 5 \times 7 - 24 = -10$$

مقصود از تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم این است که

معین کنیم سه‌جمله‌ای به ازای چه مقادیر  $x$  مثبت یا منفی است.

۴- تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم  $ax^2 + bx + c$ :

برای تعیین علامت سه‌جمله‌ای نامبرده، از تجزیه همین سه‌جمله‌ای

به حاصل ضرب عاملهای درجه اول استفاده می‌کنیم.

الف - دیدیم وقتی مبین سه‌جمله‌ای منفی است، سه جمله‌ای به

صورت زیر نوشته می‌شود.

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

با این فرض، عبارت داخل کروشه به ازای جمیع مقادیر  $x$  و

ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$ ، مثبت است.

هرگاه  $a > 0$  باشد،  $ax^2 + bx + c$  هم مثبت است و اگر

$a < 0$  باشد، حاصل ضرب در درکروشه مثبت، منفی خواهد شد، پس می‌توان گفت:

وقتی که  $\Delta < 0$  باشد، علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم به ازای جمیع مقادیر  $x$  موافق علامت  $a$  (ضریب جمله درجه دوم) است.

ب - وقتی  $\Delta = 0$  باشد، دیدیم که سه‌جمله‌ای به صورت زیر در می‌آید:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$$

( $x'$  ریشه مضاعف سه‌جمله‌ای است)؛ اگر  $x$  از ریشه مضاعف

کوچکتر یا بزرگتر باشد، وقتی که  $(x - x')$  را مجذور کنیم، حاصل

مثبت خواهد شد. چنانچه  $a > 0$  باشد، حاصل ضرب آن در مقدار

مثبت  $(x - x')^2$ ، مثبت می‌شود و چنانچه  $a < 0$  باشد، حاصل ضرب

آن در پراستن مثبت نامبرده، منفی می‌شود، پس می‌توان گفت:

وقتی که  $\Delta = 0$  باشد، علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم به ازای جمیع مقادیر  $x$  موافق علامت  $a$  است.

ج - وقتی که  $\Delta > 0$  باشد همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، سه‌جمله‌ای

به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

که در آن  $x'$  و  $x''$  عبارتند از دو ریشه‌ای که ازحل معادله :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

بدست می‌آیند و به علت مثبت بودن مبین، این دو ریشه حقیقی و اعدادی مشخص و متمایزند؛ ولی  $x$  می‌تواند عددی کوچکتر از دو ریشه یا بزرگتر از دو ریشه یا عددی بین دو ریشه باشد.

اولاً - اگر  $x$  از هر دو ریشه بزرگتر باشد، پرانتزهای :

$$(x - x') \quad \text{و} \quad (x - x'')$$

هر دو مثبتند و حاصل ضرب آنها نیز مثبت می‌شود؛

چنانچه  $a > 0$  باشد، حاصل سه جمله‌ای مثبت و چنانچه  $a < 0$

باشد، حاصل سه جمله‌ای منفی خواهد شد. پس می‌توان گفت :

به ازای مقادیری از  $x$  که از هر دو ریشه سه جمله‌ای بزرگتر باشند، علامت سه جمله‌ای موافق علامت  $a$  است.

ثانیاً - اگر  $x$  از هر دو ریشه کوچکتر باشد، پرانتزهای :

$$(x - x') \quad \text{و} \quad (x - x'')$$

هر دو منفی و حاصل ضرب آنها مثبت می‌شود؛ اگر  $a > 0$  باشد، حاصل سه جمله‌ای مثبت و اگر  $a < 0$  باشد، حاصل سه جمله‌ای منفی است.

پس :

به ازای مقادیری از  $x$  که از هر دو ریشه سه جمله‌ای کوچکتر باشند، علامت سه جمله‌ای موافق علامت  $a$  است.

ثالثاً - اگر  $x$  بین  $x'$  و  $x''$  واقع باشد، واضح است که  $x$  از يك

ریشه بزرگتر و از دیگری کوچکتر است؛ در نتیجه یکی از پرانتزهای

$$(x - x') \quad \text{و} \quad (x - x'')$$

مثبت و دیگری منفی خواهد شد و حاصل ضرب این دو پرانتز منفی می‌شود؛ اگر  $a > 0$  باشد، حاصل سه جمله‌ای منفی و اگر  $a < 0$  باشد، حاصل سه جمله‌ای مثبت خواهد شد. پس می‌توان گفت :

به ازای جمیع مقادیر  $x$  واقع بین دو ریشه، علامت سه جمله‌ای مخالف علامت  $a$  است.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم:

علامت سه جمله‌ای درجه دوم، به ازای جمیع مقادیر  $x$  موافق علامت  $a$  (ضریب جمله درجه دوم) است، مگر وقتی که مقدار  $x$  بین دو ریشه واقع باشد، که در این صورت علامت سه جمله‌ای مخالف علامت  $a$  است.

تبصره - بطور اختصار مقادیری از  $x$  را که از  $x'$  و  $x''$  بزرگتر یا کوچکترند، مقادیر خارج ریشه‌ها می‌گویند.

مثال ۱ - علامت  $x^2 + x + 1$  را تعیین کنید.

چون مبین این سه جمله‌ای منفی است، علامت سه جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر  $x$  موافق علامت  $a$ ، ضریب  $x^2$ ، است؛ یعنی سه جمله‌ای مفروض همواره مثبت است.

مثال ۲ - علامت  $x^2 + 2x - 1$  را معین کنید.

مبین این سه جمله‌ای صفر است؛ ریشه مضاعف را پیدا می‌کنیم:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

علامت سهجمله‌ای به ازای جميع مقادير  $x$  موافق علامت  $a$  است و چون  $a$  در این مثال منفي است، سهجمله‌ای مفروض به ازای جميع مقادير  $x$  منفي است مگر به ازای  $x=1$  که مقدارش برابر صفر است.

مثال ۳- علامت  $x^2 - 5x + 4$  را تعيين کنید.

چون مبین این سهجمله‌ای مثبت است، باید ریشه‌ها را معین

کنیم:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x' = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$x'' = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

معادله دارای ریشه‌های ۱ و ۴ است. اگر  $x$  بین (۱ و ۴) باشد،

علامت سهجمله‌ای مخالف علامت  $a$  یعنی سهجمله‌ای مفروض منفي است. چنانچه مقدار  $x$  خارج ریشه‌ها باشد، سهجمله‌ای مفروض مثبت است، یعنی:

به ازای  $1 < x < 4$  داریم:

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

و به ازای  $x < 1$  یا  $x > 4$  داریم:

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

می‌توان خلاصه این بحث را به صورت جدول هم‌نمایش داد:

$x$	$-\infty$	۱	۲	$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$	+	+	-	+

### III - حل نامعادلات درجه دوم

۵- صورت کلی نامعادلات درجه دوم عبارت است از:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

یا

مقصود از حل نامعادله، تعیین حدود  $x$  است بطوری که جميع مقادير  $x$  واقع در آن حدود، در نامعادله صدق کنند؛ به عبارت دیگر، تعیین علامت سهجمله‌ای درجه دوم است بطوری که با جهت نامعادله مطابقت داشته باشد.

مثال ۱- نامعادله:  $x^2 + x - 6 > 0$  را حل کنید.

حل- ابتدا علامت سهجمله‌ای درجه دوم طرف اول نامعادله

را معین می‌کنیم. چون مبین مثبت است، پس ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x' = -3$$

$$x'' = 2$$

و

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
$x^2+x-6$	+	+	-	+

واضح است اگر  $x > 2$  یا  $x < -3$  باشد. سه جمله‌ای  $x^2+x-6$

مثبت است، پس جواب نامعادله  $\begin{cases} x > 2 \\ x < -3 \end{cases}$  است.

مثال ۲ - نامعادله:  $-x^2+6x-9 > 0$  را حل کنید.

حل:

$$-x^2+6x-9=0$$

$$x' = x'' = 3$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$-x^2+6x-9$	-	-	-

سه جمله‌ای مفروض به ازای جميع مقادير  $x$  به جز  $x=3$ ،

منفی است، پس نامعادله دارای جواب نیست.

مثال ۳ - نامعادله  $\frac{yx^2-5}{8x^2+3} < 4$  را حل کنید.

حل - ابتدا تمام جمله‌ها را به يك طرف نقل می‌کنیم و مخرج

مشترك می‌گیریم:

$$\frac{yx^2-5}{8x^2+3} - 4 < 0$$

$$\frac{-25x^2-17}{8x^2+3} < 0$$

چون سه جمله‌ای درجه دوم ناقص  $(-25x^2-17)$  دارای

جواب نیست (a و c متحدالعلامه‌اند) علامت صورت موافق علامت a

است، یعنی صورت همواره منفی است.  $8x^2+3$  نیز دارای جواب

نیست و علامت آن همواره مثبت است. پس کسر  $\frac{-25x^2-17}{8x^2+3}$

به ازای جميع مقادير  $x$  منفی است. یعنی جميع اعداد می‌توانند جواب نامعادله باشند.

مثال ۴ - مطلوب است حل نامعادله:  $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$

حل:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} - 1 > 0$$

$$\frac{2(2x-5)}{(x-3)(x-4)} > 0$$

تنها ریشه صورت،  $x = 2.5$  و ریشه‌های مخرج ۳ و ۴ است. از جدول

زیر علامت کسر و در نتیجه جواب نامعادله بدست می‌آید:

x	$-\infty$	۲٫۵	۳	۴	$+\infty$
$2(2x-5)$	-	-	+	+	+
$(x-3)(x-4)$	+	+	-	-	+
نامعادله	-	-	+	-	+
			جواب		جواب

جواب نامعادله :  $\begin{cases} x > 4 \\ 2/5 < x < 3 \end{cases}$  است .

مثال ۵- مطلوب است حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ -x^2 + 1 < 0 \end{cases}$$

حل - جوابهای هریک از نامعادلات رامعین می کنیم . از مقایسه

جوابها ، جواب دستگاه بدست می آید :

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x' = -\frac{1}{2}$$

$$x'' = 2$$

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$x' = -1$$

$$x'' = 1$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$	+	+	+	+	+	+
$-x^2 + 1$	-	-	+	+	-	-
نتیجه	جواب	جواب	جواب	جواب	جواب	جواب

جوابهای دستگاه عبارتند از :  $\begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$

مثال ۶- حدود x را طوری تعیین کنید که کسر :

$$\frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 12x + 32}$$

محصور بین -1 و +1 باشد .

حل - یعنی باید داشته باشیم :

$$-1 < \frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 12x + 32} < 1$$

این نامعادلات مضاعف را می توان به صورت دستگاه زیر نوشت :

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 12x + 32} > -1 \\ \frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 12x + 32} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 12x + 32} + 1 > 0 \\ \frac{x^2 - 13x + 22}{x^2 - 12x + 32} - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 25x + 54}{x^2 - 12x + 32} > 0 \\ \frac{-x - 10}{x^2 - 12x + 32} < 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 25x + 54 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{193}}{4}$$

جواب دستگاه عبارت است از:  $x < \frac{1}{4}(25 - \sqrt{193})$  و  $x > \frac{1}{4}(25 + \sqrt{193})$

$$x > \frac{1}{4}(25 + \sqrt{193})$$

مثال ۷- معین کنید عبارت:  $\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 7x + 12}}$  به ازای چه

مقادیری از  $x$  موهومی نیست.

حل- می دانیم مقدار رادیکال در صورتی موهومی نیست که

عبارت زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد؛ پس باید علامت کسر واقع در زیر رادیکال را تعیین کنیم، یعنی نامعادله کسری:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 7x + 12} \geq 0$$

را حل کنیم.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ x'' &= 2 \end{aligned}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\begin{aligned} x' &= -4 \\ x'' &= -3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-4$	$-3$	$1$	$2$	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	0	-	+
$x^2 + 7x + 12$	+	0	-	0	+	+
نتیجه	+	+	-	+	0	+

$$x' = \frac{1}{4}(25 - \sqrt{193}) \neq 2/25$$

$$x'' = \frac{1}{4}(25 + \sqrt{193}) \neq 9/25$$

$$x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$\begin{aligned} x' &= 4 \\ x'' &= 8 \end{aligned}$$

$$-x - 10 = 0$$

$$x = -10$$

x	$-\infty$	$-10$	$\frac{1}{4}(25 - \sqrt{193})$	4	8	$\frac{1}{4}(25 + \sqrt{193})$	$+\infty$
$x^2 - 12x + 32$	+	+	+	0	-	-	+
$x^2 - 12x + 32$	+	+	+	+	0	-	+
نامعادله اول	+	+	+	+	+	+	+
$-x - 10$	+	0	-	-	-	-	-
$x^2 - 12x + 32$	+	+	+	+	+	+	+
نامعادله دوم	+	+	+	+	+	+	+
نتیجه	+	+	+	+	+	+	+

رادیكال وقتى داراى معنى است كه  $x < -۴$  يا  $x \leq ۳$  يا  $x \geq ۲$  باشد.

تمرین

سه جمله‌ای زیر را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید:

$x^2 + 3x - 28$	-۲	$x^2 - 9x + 18$	-۱
$2x^2 - 12x + 18$	-۴	$2x^2 - 21x + 36$	-۳
$x^2 - 12x + 35$	-۶	$-2x^2 + 3x + 2$	-۵
$x^2 - 2ax + a^2 - b^2$	-۸	$2x^2 + 5x - 44$	-۷
$x^2 - (a+b)x + ab$			-۹
$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - 1$			-۱۰
$12abx^2 - (16a^2 - 9b^2)x - 12ab$			-۱۱
$abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc$			-۱۲
$(a^2 - 4b^2)x^2 + 2(a^2 + 2b^2)x + a^2 - b^2$			-۱۳

کسرهای زیر را ساده کنید:

$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$	-۱۵	$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x - 5}$	-۱۴
$\frac{2x^2 - 2x - 12}{3x^2 + x - 12}$	-۱۷	$\frac{x^2 + 10x + 21}{2x^2 + 12x + 18}$	-۱۶
$\frac{x^2 - 4x}{4x^2 - 4x^2 - 8x}$	-۱۹	$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x - 9}$	-۱۸
$\frac{x^2 - 1 + a^2 - 2ax}{x^2 + a^2 - 2ax + a - x - 2}$			-۲۰
$\frac{abx^2 - (a+b)x + 1}{a^2x^2 - a^2bx + ab - 1}$			-۲۱

علامت عبارات زیر را تعیین کنید:

$x^2 - 8x + 12$	-۲۳	$-x^2 + 8x - 12$	-۲۲
$x^2 - 8x + 16$	-۲۵	$-x^2 + 8x - 16$	-۲۴
$2x^2 - 16x + 40$	-۲۷	$-2x^2 - 16x - 40$	-۲۶
$(x+1)(2x^2 - 4x + 1)$			-۲۸
$2x^2 - 16x - 40$			-۲۹
$(x^2 - 4x^2)(x^2 - 2x - 3)$			-۳۰
$(2x+8)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 1)$			-۳۱
$(2x+8)^2(2x^2 - 8)$			-۳۲

-۳۳- حدود  $m$  را بطریقی تعیین کنید که سه جمله‌ای:

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

-۳۴- حدود  $m$  را بطریقی تعیین کنید که سه جمله‌ای:

$$\begin{cases} (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 \\ (4-m)x^2 - 3x + m + 4 \end{cases}$$

همواره مثبت باشند.

-۳۵- حدود  $x$  را طوری تعیین کنید که هر يك از رادیکالهای

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} \text{ و } \sqrt{2x + 3 - x^2}$$

دارای معنى باشند.

-۳۶- حدود  $x$  را بطریقی تعیین کنید که کسر  $\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 5x + 4}$

محمور بین  $-۱$  و  $+۱$  باشد.

-۳۷- حدود  $x$  را بطریقی تعیین کنید که کسر  $\frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$

محمور بین  $-۲$  و  $+۲$  باشد.



دستگاههای نامعادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 32 > 0 \\ x^2 - 13x + 3 < 0 \end{cases} \quad -39 \quad \begin{cases} 5x^2 - 7x < 0 \\ x^2 - 11x + 30 < 0 \end{cases} \quad -38$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 2x^2 + 2x - 1 < 0 \end{cases} \quad -40$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x^2 + 10x > 0 \\ x^2 - 12x^2 + 32x > 0 \end{cases} \quad -41$$

$$\begin{cases} (x-1)(-x^2+6x-9) > 0 \\ (x+1)(x^2-2x+7) < 0 \end{cases} \quad -42$$

## حل معادلاتی که به درجه دوم تبدیل پذیرند

۱- هرگاه درجه معادله‌ای، پس از حذف مخرجها و رادیکالها و نقل تمام جمله‌ها به يك طرف وساده کردن، بیش از ۲ باشد و بتوان طرف اول آن را به حاصل ضرب عاملهای درجه اول و دوم تبدیل کرد، چنین معادله را تبدیل پذیر گویند.

الف- معادلاتی که با انتخاب مجهول معاون مناسب می‌توان

حل کرد :

اگر در معادله‌ای بتوانیم عبارتی را که شامل حرف مجهول است، مجهول جدید قرار دهیم بطوری که معادله حاصل فقط شامل مجهول جدید و حد اکثر از درجه دوم باشد، معادله با مجهول جدید قابل حل است.

مثال ۱- مطلوب است حل معادله :

$$(I) \quad (x^2 - 5x)^2 - 7(x^2 - 5x) + 6 = 0$$

حل - فرض می‌کنیم :

$$(II) \quad x^2 - 5x = y$$

در نتیجه معادله (I) به صورت زیر در می‌آید :

$$(III) \quad y'' - 7y' + 6 = 0$$

معادله (III) را معادله حلال می نامند و ریشه های آن عبارتند از:

$$y' = 1$$

$$y'' = 6$$

و

حال هر يك از مقادیر  $y$  را که از حل معادله حلال بدست

آمده اند در معادله (II) به جای  $y$  قرار داده و معادلات حاصل را

به شرح زیر حل می کنیم:

$$(E) \quad x^2 - 5x = 6$$

$$(E') \quad x^2 - 5x = 1$$

$$\begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 6 \end{cases} \quad (E) \text{ ریشه های معادله}$$

ریشه های معادله (E')

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(\delta - \sqrt{29}) \\ x'' = \frac{1}{4}(\delta + \sqrt{29}) \end{cases}$$

مثال ۳ - مطلوب است حل معادله:

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0$$

حل - با فرض  $x + \frac{1}{x} = y$  (I) چنین خواهیم داشت:

$$\text{معادله حلال: } 2y^2 - y - 10 = 0$$

جوابهای معادله حلال عبارت است از:

$$y' = -2 \quad \text{و} \quad y'' = \frac{5}{2}$$

برای تعیین جوابهای معادله اصلی، هر يك از جوابهای معادله حلال را در رابطه (I) به جای  $y$  قرار می دهیم و معادلات حاصل را به شرح زیر حل می کنیم:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -2 \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{و}$$

$$(E) \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{یا}$$

$$(E') \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{1}$$

$$\text{ریشه های معادله (E): } x' = x'' = -1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ x'' = 2 \end{cases} \quad \text{ریشه های معادله (E'):$$

مثال ۳ - معادله  $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0$  را حل

کنید.

فرض می‌کنیم  $x - \frac{1}{x} = y$  (I) باشد؛ طرفین تساوی (I) را

مجذور می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = y^2$$

$$(II) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2 \quad یا$$

با توجه به روابط (I) و (II)، معادله مفروض به صورت زیر

نوشته می‌شود:

$$y^2 + 2 + 2y + 1 = 0$$

$$y^2 + 2y + 3 = 0 \quad \text{معادله حلال:}$$

جوابهای معادله حلال عبارتند از:

$$y = -2 \pm \sqrt{3-2}$$

$$y' = -3$$

$$y'' = -1$$

برای تعیین جوابهای معادله اصلی، هریک از جوابهای معادله

حلال را در رابطه (I) به جای  $y$  قرار می‌دهیم و معادلات حاصل را به

شرح زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = -3 \\ x - \frac{1}{x} = -1 \end{cases}$$

$$(E) \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ (E') \quad \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله (E):

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(\sqrt{13}+2) \\ x'' = \frac{1}{2}(\sqrt{13}-2) \end{cases}$$

ریشه‌های معادله (E'):

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \\ x'' = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \end{cases}$$

مثال ۴ - معادله  $2x - 5x^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$  را حل کنید.

حل - فرض می‌کنیم  $x^{\frac{1}{2}} = y$  (I) باشد.

طرفین رابطه (I) را مجذور می‌کنیم:

$$(II) \quad x = y^2$$

با توجه به روابط (I) و (II)، معادله اصلی به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \quad \text{معادله حلال:}$$

جوابهای معادله حلال عبارتند از:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$y' = \frac{1}{y}$$

$$y'' = 2$$

برای تعیین جوابهای معادله اصلی، هریک از جوابهای معادله حلال را در رابطه (I) یا (II) به جای  $y$  قرار می‌دهیم و معادلات حاصل را به شرح زیر حل می‌کنیم:

$$(E) \quad \begin{cases} x^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$(E') \quad \begin{cases} x^{\frac{1}{y}} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y} & : \text{جواب معادله (E)} \\ x = y & : \text{جواب معادله (E')} \end{cases}$$

### ب- حل معادلات دوجمله‌ای

صورت کلی معادلات دوجمله‌ای چنین است:

$$ax^p + bx^q = 0$$

در این معادله با فرض  $p > q$  می‌توان از  $x^q$  فاکتور گرفت:

$$x^q(ax^{p-q} + b) = 0$$

حاصل ضرب دو عامل طرف اول رابطه اخیر به ازای جوابهای

دومعادله زیر صفر می‌شود:

$$x^q = 0$$

$$ax^{p-q} + b = 0 \quad \text{و}$$

$$x = 0 \quad \text{و از آنجا:}$$

$$x = \sqrt[p-q]{-\frac{b}{a}} \quad \text{و}$$

هرگاه  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامه باشند، چون مقدار زیر رادیکال مثبت می‌شود، معادله غیر از جوابهای فوق، جواب خواهد داشت. چنانچه  $(p-q)$  عددی زوج باشد، دو جواب قرینه بدست می‌آید. چنانچه  $(p-q)$  عددی فرد باشد، یک جواب مثبت بدست می‌آید. اگر  $a$  و  $b$  متحدالعلامه باشند، معادله غیر از جوابهای  $x=0$  وقتی جواب حقیقی دیگر خواهد داشت که  $(p-q)$  فرد باشد و این جواب هم منفی است.

مثال ۱- مطلوب است حل معادله:  $x^4 - 36x^2 = 0$ .

$$\text{حل:} \quad x^2(x^2 - 36) = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$x = -6$$

$$x = +6$$

معادله دارای ریشه مضاعف صفر و جوابهای  $(\pm 6)$  است.

مثال ۲ - معادله  $x^5 + 8x^1 = 0$  را حل کنید .

حل :  $x^2(x^3 + 8) = 0$

$$x^3 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = -2$$

معادله دارای ریشه مضاعف صفر و جواب  $(-2)$  است.

مثال ۳ - معادله  $x^5 + 8x^2 = 0$  را حل کنید .

حل :  $x^2(x^3 + 8) = 0$

$$x^3 = 0$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

اما معادله  $x^3 + 8 = 0$  جواب ندارد .

پس معادله دارای سه ریشه برابر صفر است .

ج - حل معادلات سه جمله‌ای

صورت کلی معادلات سه جمله‌ای چنین است :

$$(I) \quad ax^p + bx^q + cx^r = 0$$

در معادله (I) وقتی نماینده‌های  $r$  و  $q$  و  $p$  جمله‌های متوالی

یک تصاعد حسابی باشند، می‌توان آن را به طریق زیر حل کرد:

اگر  $n$  را قدرنسبت این تصاعد فرض کنیم چنین خواهیم داشت:

$$(E) \quad p = q + n$$

$$(E') \quad q = r + n$$

از جمع دو رابطه (E) و (E') نتیجه می‌شود :

$$(E'') \quad p = r + 2n$$

و با توجه به روابط (E') و (E'') معادله (I) به صورت زیر نوشته

می‌شود :

$$ax^{r+2n} + bx^{r+n} + cx^r = 0$$

$$(II) \quad x^r (ax^{2n} + bx^n + c) = 0$$

معادله (II) نیز به دو معادله زیر تجزیه می‌شود:

$$(A) \quad \begin{cases} x^r = 0 \\ (B) \quad ax^{2n} + bx^n + c = 0 \end{cases}$$

از معادله (A) نتیجه می‌شود :  $x = 0$  ؛ یعنی معادله  $r$  (A)

ریشه برابر صفر دارد .

برای حل معادله (B) فرض می‌کنیم :

$$(C) \quad x^n = y$$

$$(D) \quad x^{2n} = y^2 \quad \text{پس}$$

و با رعایت روابط (C) و (D)، معادله (B) به صورت معادله حلال زیر درمی آید :

$$ay^2 + by + c = 0$$

ریشه های معادله حلال (چنانچه حقیقی باشند) چنین خواهند بود :

$$y' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

برای تعیین جوابهای معادله (B) کافی است در رابطه (C) به جای  $y$  مقادیر  $y'$  و  $y''$  را قرار داده و معادله های :

$$x^n = y'$$

$$x^n = y''$$

را حل کنیم .

چنانچه  $y'$  و  $y''$  اعدادی مثبت باشند ، هر يك از معادلات اخیر دارای دو جواب قرینه یا يك جواب مثبت خواهد بود (بر حسب آنكه  $n$  زوج یا فرد باشد) ؛ چنانچه  $y'$  و  $y''$  اعدادی منفی باشند ، معادلات اخیر وقتی دارای جوابند كه  $n$  فرد باشد و در این صورت از هر کدام يك جواب منفی بدست می آید :

مثال ۱- معادله  $x^6 - 7x^2 + 512 = 0$  را حل کنید .

حل- با فرض  $x^2 = y$  ، معادله حلال را تشکیل می دهیم :

$$y^3 - 7y + 512 = 0$$

$$y = 26 \pm \sqrt{1296 - 512}$$

$$y' = 26 - 28 = -2$$

$$y'' = 26 + 28 = 54$$

اکنون ریشه های معادله اصلی را تعیین می کنیم :

$$x^2 = y' = -2$$

$$x_1 = \sqrt{-2} = \sqrt{2}i$$

$$x^2 = y'' = 54$$

$$x_2 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

ریشه های معادله اصلی اعداد ۲ و ۳ هستند .

مثال ۳- معادله  $3x^2 - 7x^4 + 4x = 0$  را حل کنید :

$$x(3x^2 - 7x^4 + 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$(I) \quad 3x^2 - 7x^4 + 4 = 0$$

با فرض  $x^2 = y$  (II) ، معادله (I) به صورت معادله حلال زیر نوشته می شود :

$$3y^2 - 7y + 4 = 0$$

ریشه های معادله حلال عبارتند از :

$$y' = 1$$

$$y'' = \frac{4}{3}$$

برای تعیین ریشه های معادله اصلی کافی است در معادله (II) به

جای  $y$  هر يك از ریشه های معادله حلال را قرار دهیم و از معادلات

حاصل ، مقدار  $x$  را بدست آوریم :

$$x^2 = y' = 1$$

$$x_1 = \sqrt{1} = 1$$

$$x^2 = y'' = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{36}{27}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{27}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{27}}$$

یا بطور خلاصه :

ریشه های معادله مفروض، اعداد ۰ و ۱ و  $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{27}}$  هستند .

د - معادله دومجنوری

معادله درجه چهارمی را که شامل جمله های درجه فرد از حرف

مجهول نباشد ، معادله دومجنوری می نامند .

صورت کلی معادله دومجنوری چنین است :

$$ax^2 + bx' + c = 0$$

برای حل معادلات دومجنوری با فرض  $x' = y$  معادله حلال :

$$ay^2 + by + c = 0$$

را تشکیل می دهند ، سپس هر يك از ریشه های معادله حلال را مساوی

$x'$  قرار می دهند و ریشه های معادله دومجنوری را پیدا می کنند .

تبصره - چنانچه معادله حلال جواب نداشته باشد ، معادله دو

مجنوری هم جواب نخواهد داشت .

مثال ۱ - معادله  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  را حل کنید .

حل: با فرض  $x^2 = y$  معادله حلال به صورت زیر نوشته

می شود :

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

ریشه های این معادله عبارتند از  $y' = 4$  و  $y'' = 9$  ؛ در نتیجه ریشه های

معادله دومجنوری چنین خواهد شد :

$$x^2 = y' = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x^2 = y'' = 9$$

$$x = \pm 3$$

ریشه های معادله دومجنوری (به شرط وجود آنها) همیشه

دوبو قرینه یکدیگرند .



مثال ۳ - معادله  $x^2 - 3x - 4 = 0$  را حل کنید.

حل: فرض:  $x' = y$

معادله حلال:  $y^2 - 3y - 4 = 0$

ریشه‌های معادله حلال:  $\begin{cases} y' = -1 \\ y'' = 4 \end{cases}$

دو جواب از جوابهای معادله دو مجذور موهومی است  $\left. \begin{matrix} x' = y' = -1 \end{matrix} \right\}$

$$x' = y'' = 4$$

$$x = \pm 2$$

معادله دو مجذور فقط جوابهای  $(\pm 2)$  را دارد.

مثال ۴ - معادله  $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$  را حل کنید.

حل: فرض:  $x^2 = y$

معادله حلال:  $2y^2 + 7y + 3 = 0$

ریشه‌های معادله حلال که هر دو منفیند  $\begin{cases} y' = -3 \\ y'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$

ریشه‌های معادله دو مجذور موهومند.

بحث در وجود و تعداد ریشه‌های معادله دو مجذور:

چنانچه معادله حلال جواب نداشته باشد، چهار ریشه معادله دو مجذور موهومند. همچنین وقتی معادله حلال دارای دو ریشه منفی باشد، یعنی اگر:

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$\frac{c}{a} > 0 \quad \text{و}$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \quad \text{و}$$

باشد. معادله دو مجذور دارای جواب نیست.

چنانچه معادله حلال دو ریشه مثبت داشته باشد، یعنی هرگاه:

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$\frac{c}{a} > 0 \quad \text{و}$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \quad \text{و}$$

باشد، معادله دو مجذور دارای چهار جواب خواهد بود که دو بدو قرینه یکدیگرند.

در صورتی که  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، معادله دو مجذور فقط دو جواب

قرینه خواهد داشت.

## ه - معادله معکوس نوع اول

معادله معکوس نوع اول معادله‌ای را گویند که حاصل ضرب جفت ریشه‌هایش برابر واحد باشد .

از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر  $\alpha$  ریشه یک معادله معکوس نوع اول باشد،  $\frac{1}{\alpha}$  نیز ریشه همان معادله خواهد بود؛ بعلاوه تعداد ریشه‌های معادله معکوس نوع اول همیشه زوج است، مگر وقتی که یکی از ریشه‌ها برابر  $(+1)$  یا  $(-1)$  باشد که در این صورت ریشه معادله و عکس آن باهم متساویند و در نتیجه تعداد ریشه‌ها فرد خواهد بود .

۴ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله‌ای از درجه زوج معکوس نوع اول باشد، این است که ضرایب جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین، متساوی باشند؛ چنانچه معادله فاقد جمله وسط باشد، ضرایب جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین می‌توانند قرینه یکدیگر نیز باشند .

اولاً شرط لازم است - فرض می‌کنیم معادله :

$$(I) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

معکوس نوع اول باشد؛ اگر  $\alpha \neq 0$  ریشه معادله (I) فرض شود، طبق تعریف،  $\frac{1}{\alpha}$  نیز ریشه همان معادله خواهد بود؛ یعنی چنین خواهیم داشت :

$$a(\frac{1}{\alpha})^4 + b(\frac{1}{\alpha})^3 + c(\frac{1}{\alpha})^2 + d(\frac{1}{\alpha}) + e = 0$$

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 = 0 \quad یا$$

از رابطه اخیر معلوم می‌شود که  $\alpha$  ریشه معادله :

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0$$

$$(II) \quad ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad یا$$

است چون بنا بر فرض،  $\alpha$  ریشه معادله (I) است، پس معادلات (I) و (II) دارای ریشه مشترک می‌باشند؛ در نتیجه باید ضرایب جمله‌متشابه از معادلات (I) و (II) متناسب باشند، یعنی باید چنین داشته باشیم :

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{c}{c} = \frac{d}{b} = \frac{e}{a}$$

حال اگر  $e \neq 0$  باشد، از نسبت  $\frac{c}{e} = 1$  معلوم می‌شود :

$$a = e$$

$$b = d$$

و

و معادله (I) به صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$(III) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

چنانچه  $e = 0$  یعنی معادله (I) فاقد جمله وسط باشد، تناسب‌های بالا چنین می‌شود :

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{d}{b} = \frac{e}{a}$$

از برابری دونسبت اول و آخر و همچنین از برابری دو نسبت  
وسط نتیجه می شود :

$$a^y = e^x$$

$$b^y = d^x \quad \text{و}$$

$$a = \pm e \quad \text{و از آنجا}$$

$$b = \pm d \quad \text{و}$$

در نتیجه معادله (I) به یکی از دو صورت زیر درمی آید :

$$(IV) \quad ax^y + bx^y + bx + a = 0$$

$$(V) \quad ax^y + bx^y - bx - a = 0$$

ثانیاً شرط کافی است - اکنون باید ثابت کنیم که هر يك از  
معادلات (III) و (IV) و (V) معادله معکوس نوع اول است .

یکی از این معادلات مثلاً معادله (V) را در نظر می گیریم، اگر  
 $a \neq 0$  ریشه این معادله باشد، چنین خواهیم داشت :

$$ax^y + bx^y - bx - a = 0$$

چون طرفین را با  $x^y$  از هر دو طرف (یا  $-a$ ) تقسیم کنیم، چنین  
خواهیم داشت .

$$-a - b\left(\frac{1}{a}\right) + b\left(\frac{1}{a}\right)^y + a\left(\frac{1}{a}\right)^y = 0$$

$$a\left(\frac{1}{a}\right)^y + b\left(\frac{1}{a}\right)^y - b\left(\frac{1}{a}\right) - a = 0 \quad \text{یا :}$$

از تساوی اخیر معلوم می شود عدد  $\left(\frac{1}{a}\right)$  نیز ریشه معادله (V)

می باشد .

۴ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله ای از درجه  
فرد معکوس نوع اول باشد، این است که ضرایب جمله های  
متساوی البعد از طرفین متساوی یا قرینه یکدیگر باشند .

با استدلالی نظیر قضیه قبل، حکم ثابت می شود و نتیجه می گیریم  
که معادلات معکوس نوع اول و از درجه فرد، مثلاً از درجه پنجم،  
به یکی از دو صورت زیر نوشته می شود :

$$(VI) \quad ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$(VII) \quad ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

معادله معکوس (VI) دارای ریشه (۱-) و معادله معکوس  
(VII) دارای ریشه (۱+) است .

تصهره - معادلات معکوس از درجه پنجم به بالا، عموماً به  
معادلات درجه دوم تبدیل پذیر نیستند .

۴- حل معادلات معکوس نوع اول - بطوری که گفته شد،  
معادلات معکوس نوع اول و از درجه فرد، يك جواب (۱+) یا (۱-)  
دارند، پس بر (۱-) یا (۱+) قابل قسمت اند. بعد از تقسیم معادله  
اصلی بر (۱-) یا (۱+)، معادله حاصل از درجه زوج خواهد  
بود. چنانچه درجه این معادله و بطور کلی معادلات معکوس نوع اول  
و از درجه زوج را  $2m$  فرض کنیم، برای حل چنین معادلات، ابتدا  
طرفین معادله را بر  $x^m$  تقسیم می کنیم و با فرض :

$$x + \frac{1}{x} = y$$

معادله حلال را ترتیب می دهیم؛ این معادله از درجه  $m$  خواهد

بود. چنانچه معادله حلال قابل حل باشد، معادلات معکوس نوع اول را می توان حل کرد.

مثال ۹- معادله معکوس  $ax^2+bx^2+bx+a=0$  را حل کنید.  
این معادله بر  $(x+1)$  قابل قسمت است. پس از تقسیم معادله بر  $(x+1)$  چنین خواهیم داشت.

$$(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]=0$$

از حل این معادله جوابهای معادله معکوس بدست می آید.

تذکره - به جای تقسیم بر  $(x+1)$ ، می توان از طریق فاکتورگیری هم به همین نتیجه رسید.

$$ax^2+bx^2+bx+a=0$$

$$a(x^2+1)+bx(x+1)=0$$

$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0$$

$$(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]=0$$

مثال ۴- معادله معکوس  $ax^2+bx^2-bx-a=0$  را حل

کنید.

این معادله بر  $(x-1)$  قابل قسمت است؛ پس از تقسیم معادله بر  $(x-1)$  چنین خواهیم داشت:

$$(x-1)[ax^2+(a+b)x+a]=0$$

از حل این معادله، جوابهای معادله معکوس بدست می آید.

مثال ۳- معادله معکوس  $ax^4+bx^2+cx^2+bx+a=0$

را حل کنید. طرفین معادله را بر  $x^m$  یعنی  $x^2$  تقسیم می کنیم:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

اذاً رابض جمله های متساوی البعد از طرفین فاکتور می گیریم:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

با فرض  $x+\frac{1}{x}=y$ ، چنین خواهیم داشت:

$$a(y^2-2)+by+c=0$$

$$ay^2+by+c-2a=0$$

چنانچه  $y'$  و  $y''$  ریشه های معادله اخیر (معادله حلال) فرض

شوند، ریشه های معادله معکوس از حل معادلات:

$$x+\frac{1}{x}=y'$$

$$x+\frac{1}{x}=y''$$

بدست می آیند. این معادلات وقتی جواب دارند که مبین هر یک مثبت

یا اقلاً صفر باشد. یعنی داشته باشیم.

$$x^2-y'x+1=0 \quad x^2-y''x+1=0$$

$$\Delta=y'^2-4\geq 0 \quad \Delta=y''^2-4\geq 0$$

یعنی بطور کلی ریشه های معادله حلال بصورت  $y\geq 2$  یا  $y\leq -2$

باشد؛ به عبارت دیگر، ریشه های معادله حلال بین  $(-2)$  و  $(2)$

واقع نباشد.

مثال ۴ - معادله معکوس  $ax^2 + bx^2 + bx + a = 0$  عیناً

مانند مثال (۳) حل می شود.

مثال ۵ - معادله  $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$  را حل کنید.ریشه های معادله فوق  $(\pm 1)$  هستند. پس معادله بر:

$$(x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$$

قابل قسمت است؛ بعد از تقسیم معادله بر  $(x^2 - 1)$  چنین خواهیم داشت:

$$ax^2 + bx^2 - bx - a = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

که از حل این معادله، ریشه های معادله معکوس بدست می آید.

تذکر - از راه تجزیه هم می توان به همین نتیجه رسید:

$$a(x^4 - 1) + bx(x^3 - 1) = a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + bx(x^2 - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

مثال عددی - مطلوب است حل معادله:

$$12x^5 - 8x^3 - 45x^2 + 45x + 18x - 12 = 0$$

معادله بر  $(x - 1)$  قابل قسمت است. پس از تقسیم معادله بر $(x - 1)$  نتیجه می شود:

$$(x - 1)(12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12) = 0$$

يك جواب معادله  $x = 1$  است. اکنون معادله:

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$$

را حل می کنیم. ابتدا طرفین تساوی را بر  $x^2$  تقسیم می کنیم:

$$12x^2 + 4x - 41 + \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

انضرایب جمله های متساوی البعد از طرفین فاکتور می گیریم:

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

با فرض  $x + \frac{1}{x} = y$  و نتیجه ای که از این فرض به صورت زیر حاصل می شود:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

معادله حلال را تشکیل می دهیم و آن را حل می کنیم:

$$12(y^2 - 2) + 4y - 41 = 0$$

$$12y^2 + 4y - 65 = 0$$

$$y' = -\frac{5}{4}$$

$$y'' = \frac{12}{5}$$

از حل معادلات:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{4}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{12}{5}$$

جوابهای دیگر معادله بدست می آید:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{6}$$

$$6x^2 - 17x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{3} \\ x'' &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x' &= -2 \\ x'' &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس معادله مفروض دارای پنج جواب به شرح زیر است :

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{3}{2} \quad x_4 = -2 \quad x_5 = -\frac{1}{2}$$

و - معادله معکوس نوع دوم :

۵- معادله معکوس نوع دوم معادله‌ای را گویند که حاصل ضرب

جفت جفت ریشه‌هایش برابر  $(-1)$  باشد ؛ طبق این تعریف ، اگر

$\alpha \neq 0$  ریشه يك معادله معکوس نوع دوم باشد ، عدد  $(-\frac{1}{\alpha})$  نیز ریشه

همان معادله خواهد بود . چنانچه  $\alpha = 1$  فرض شود ، معادله ریشه

$(-1)$  هم خواهد داشت. پس :

معادله معکوس نوع دوم همیشه از درجه زوج و عدد ریشه‌هایش نیز زوج است .

۶- قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله‌ای از درجه زوج ، معکوس نوع دوم باشد ، این است که ضرایب جمله‌های متناوب البعد از طرفین متناوباً متساوی و قرینه یکدیگر باشند .

با استدلالی نظیر آنچه که در قضیه (شماره ۲) گفته شد ، این قضیه ثابت می‌شود و نتیجه می‌گیریم که معادله معکوس نوع دوم ، مثلاً از درجه چهارم ، به یکی از صورتهای زیر است .

$$ax^4 + bx^2 + cx^2 - bx + a = 0$$

$$ax^4 + bx^2 - bx + a = 0$$

$$ax^4 + bx^2 + bx - a = 0$$

۷- حل معادلات معکوس نوع دوم :

طریقه حل معادلات معکوس نوع دوم کاملاً مشابه راه‌حلی است که برای معادلات معکوس نوع اول گفته شد با این تفاوت که در این نوع معادلات باید با فرض زیر معادله حلال را تشکیل داد :

$$x - \frac{1}{x} = y$$

مثال ۱- معادله  $ax^4 + bx^2 + cx^2 - bx + a = 0$  را حل کنید.

پس از تقسیم طرفین تساوی بر  $x^2$  و فاکتورگیری لازم چنین خواهیم داشت :

$$ax^2 + bx + c - \frac{b}{x} + \frac{a}{x} = 0$$

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x - \frac{1}{x}) + c = 0$$

بافرض:  $x - \frac{1}{x} = y$  نتیجه می گیریم:

$$(x - \frac{1}{x})^2 = y^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

و معادله حلال چنین خواهد شد:

$$a(y^2 + 2) + by + c = 0$$

$$ay^2 + by + c + 2a = 0 \quad \text{یا}$$

پس از تعیین y می توان معادلات:

$$x - \frac{1}{x} = y'$$

$$x - \frac{1}{x} = y'' \quad \text{و}$$

را حل کرد و جوابهای معادله معکوس را ( چنانچه حقیقی باشند ) بدست آورد.

مثال ۳ - معادله  $ax^4 + bx^2 + bx - a = 0$  را حل کنید.

در جمله های متساوی البعد از طرفین از عوامل مشترك فاکتور

می گیریم:

$$a(x^2 - 1) + bx(x^2 + 1) = 0$$

$$a(x^2 + 1)(x^2 - 1) + bx(x^2 + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)(ax^2 + bx - a) = 0$$

معادله:  $x^2 + 1 = 0$  ریشه های موهومی دارد؛ از حل معادله:

$$ax^2 + bx - a = 0$$

جوابهای معادله معکوس را می توان بدست آورد.

مثال ۴ - معادله  $ax^4 + bx^2 - bx + a = 0$  را حل کنید.

پس از تقسیم طرفین معادله بر  $x^2$  و فاکتورگیری لازم چنین خواهیم داشت:

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x - \frac{1}{x}) = 0$$

$$x - \frac{1}{x} = y$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

$$a(y^2 + 2) + by = 0$$

$$ay^2 + by + 2a = 0$$

پس از حل معادله حلال و تعیین جوابهای آن، می توان

ریشه های معادله معکوس را بدست آورد.

### تمرین

معادلات زیر را حل کنید:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad -۲ \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad -۱$$

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \quad -۴ \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad -۳$$

$$2x^2 + 17x^2 + 4 = 0 \quad -۶ \quad 4x^2 - 27x^2 + 9 = 0 \quad -۵$$

$$3x^2 - 26x^2 - 9 = 0 \quad -۸ \quad 5x^2 - 12x^2 + 4 = 0 \quad -۷$$

$$6x^2 - x^2 - 7 = 0 \quad -۱۰ \quad 5x^2 + 8x^2 - 1 = 0 \quad -۹$$

$$x^2 - 6x^2 + 8 = 0 \quad -۱۲ \quad x^2 - 3x^2 + 1 = 0 \quad -۱۱$$

معادلات حرفی زیر را حل کنید :

$$a^2b^2x^2 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0 \quad -۱۳$$

$$x^2 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0 \quad -۱۴$$

$$c^2x^2 + c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0 \quad -۱۵$$

$$۱۶- \text{معادله } \frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = 4 \text{ را حل کنید.}$$

۱۷- تاك هزارم تقريب ديشه‌های معادله  $0 = \frac{x^2}{6} + \pi x^2 - 7$  را بدست آورید .

۱۸- m را بطريقی تعيين كنيد كه (۲-) يکی از ديشه‌های معادله زیر باشد. پس از تعيين m جوابهای معادله حاصل را بدست آورید :

$$2x^0 + (m+1)x^2 + (1+8m)x^2 - (7+m)x^2 - (6m-1)x + 6 = 0$$

معادلات زیر را حل کنید :

$$(x^2 + x^2 + 1)^2 - 28(x^2 + x^2 + 1) + 105 = 0 \quad -۱۹$$

$$(x + \sqrt{x})^2 - (x + \sqrt{x})^2 = 159600 \quad -۲۰$$

$$\frac{(1+x)^2}{1+x^2} + \frac{(1-x)^2}{1-x^2} = 2 \quad -۲۱$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad -۲۲$$

$$2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 9} + 3x = 30 \quad -۲۳$$

$$(x^2 - x + 1)^2 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^2 = 0 \quad -۲۴$$

معادلات زیر را حل کنید:

$$x^2 \pm 27 = 0 \quad -۲۶ \quad x^2 - 16 = 0 \quad -۲۵$$

$$x^2 \pm 625 = 0 \quad -۲۸ \quad x^0 = 22 \quad -۲۷$$

$$x^2 - 28x^2 + 27 = 0 \quad -۳۰ \quad x^2 - 19x^2 - 216 = 0 \quad -۲۹$$

$$8x^2 + 65x^2 + 8 = 0 \quad -۳۲ \quad x^4 - 97x^2 + 1296 = 0 \quad -۳۱$$

$$7x^2 - \frac{1890}{x^2} - 119 = 0 \quad -۳۳$$

معادلات معکوس زیر را حل کنید :

$$3x^2 - 13x^2 + 13x - 3 = 0 \quad -۳۴$$

$$2x^2 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 \quad -۳۵$$

$$x^2 - x^2 + x - 1 = 0 \quad -۳۶$$

$$5x^2 - 21x^2 + 21x - 5 = 0 \quad -۳۷$$

$$2x^2 + 5x^2 - 5x - 2 = 0 \quad -۳۸$$

$$5x^2 - 26x^2 + 26x - 5 = 0 \quad -۳۹$$

$$x^2 - 6x^2 + 6x - 1 = 0 \quad -۴۰$$

$$3x^2 - 4x^2 + 4x - 3 = 0 \quad -۴۱$$

$$x^2 - 5x^2 + 5x - 1 = 0 \quad -۴۲$$

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 - 2x + 1 = 0 \quad -۴۳$$

$$x^2 - x^2 + \frac{5}{4}x^2 - x + 1 = 0 \quad -۴۴$$

$$x^2 - 10x^2 + 5x^2 - 10x + 4 = 0 \quad -۴۵$$

$$3x^2 - 5x^2 - 14x^2 + 5x + 3 = 0 \quad -۴۶$$



$$۲x^2 - ۱۷x^2 + ۱۷x + ۴ = 0$$

-۶۷

$$\frac{1+x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

-۶۸

$$x^0 - ۴x^2 + ۳x^2 + ۳x^2 - ۴x + ۱ = 0$$

-۶۹

$$۲x^0 - ۳x^2 - ۵x^2 + ۵x^2 + ۳x - ۲ = 0$$

-۷۰

$$۱۲x^0 - ۸x^2 - ۴۵x^2 + ۴۵x^2 + ۸x - ۱۲ = 0$$

-۷۱

$$۳x^0 - ۱۶x^2 + ۱۷x^2 + ۱۷x^2 - ۱۶x + ۳ = 0$$

-۷۲

$$-۷۳ \quad \text{معادله: } ax^2 + bx^2 + cx^2 + b k x + a k^2 = 0 \text{ مفروض است.}$$

تحقیق کنید که با مجهول معاونی نظیر  $y = x + \frac{k}{x}$  این معادله بمعادله درجه دوم تبدیل پذیر است. سپس با استفاده از تمرین فوق معادلات زیر را حل کنید:

$$۲x^2 - ۵x^2 - ۱۴x^2 + ۵x + ۳ = 0$$

-۷۴

$$x^2 - ۵x^2 + ۱۰x^2 - ۱۰x + ۴ = 0$$

-۷۵

$$x^2 - ۲x^2 + x - ۶۲۵ = 0$$

-۷۶

معادلات زیر را حل کنید:

$$\sqrt{۲x+۱۲}-۳=۰$$

-۷۷

$$\sqrt{۳x-۲}=۵$$

-۷۸

$$\sqrt{x^2+۹}-۱=x$$

-۷۹

$$\sqrt{۲x+۷}-\sqrt{۲x-۱}=۲$$

-۸۰

$$\sqrt{۲x+۵}+\sqrt{x+۶}=۳$$

-۸۱

$$\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{x}=۶$$

-۸۲

$$\sqrt{x-۱}=\sqrt{۲x-۱}-۱$$

-۶۳

$$\sqrt{۳x+۴}-\sqrt{x}=۶$$

-۶۴

$$\sqrt{۳x+۸}-\sqrt{۳(۱-۲x)}=۲$$

-۶۵

$$\sqrt{۳x+۷}+\sqrt{x-۲}=\sqrt{۳x}$$

-۶۶

$$۲\sqrt{x}+\sqrt{x-۲}=\sqrt{۲x+۱}$$

-۶۷

$$\sqrt{۶+x}-\sqrt{۲-x}=\sqrt{۲+x}$$

-۶۸

$$\sqrt{۴x+۵}-\sqrt{۲x-۱}=\sqrt{x+۲}$$

-۶۹

$$\sqrt{۲x^2+۲}+\sqrt{۵-۸x^2}=\sqrt{۴x^2+۷}$$

-۷۰

### حل مسائل عددی درجه دوم

چنانکه در فصل ششم دیدیم، می توان مسائل فکری را از طریق جبر حل کرد. چنانچه حل این مسائل منجر به حل معادلات درجه دوم شود، آنها را مسائل درجه دوم گویند. در این حالت نیز باید مجهول مسئله را بطور مناسب انتخاب کرد و معادله مسئله را نوشت و با حل معادله نوشته شده، جوابها را بدست آورد و بالاخره به بحث و تحقیق در باره قابل قبول بودن جوابها پرداخت.

**مثال ۱-** می خواهند ۱۵۵۰ ریال را بین چند نفر بشاوی تقسیم کنند. در موقع تقسیم ۵ نفر حاضر نمی شوند، در نتیجه به سهم

سایرین ۷ ریال اضافه می‌شود. معین کنید تعداد نفرات اولیه و سهم هریک را.

حل - اگر تعداد نفرات اولیه را  $x$  نفر فرض کنیم، سهم هریک  $\frac{1050}{x}$  ریال می‌شود، و چون در موقع تقسیم ۵ نفر حضور ندارند و ۱۰۵۰ ریال بین  $(x-5)$  نفر تقسیم می‌شود، سهم نفرات این عده  $\frac{1050}{x-5}$  ریال خواهد شد. بنا به فرض مسئله، تفاوت این دو سهم ۷ ریال است، یعنی:

$$\frac{1050}{x-5} - \frac{1050}{x} = 7$$

اکنون این معادله را حل می‌کنیم:

$$1050x - 1050(x-5) = 7x(x-5)$$

پس از اختصار چنین خواهیم داشت:

$$x^2 - 5x - 750 = 0$$

جوابهای این معادله عبارتند از:

$$x' = -25 \quad \text{و} \quad x'' = +30$$

واضح است که چون تعداد نفرات نمی‌تواند منفی باشد، تنها جواب قابل قبول مسئله عبارت است از:

$$x = 30 \quad \text{نفر}$$

در نتیجه هر نفر دردفعه اول:

$$\frac{1050}{x} = \frac{1050}{30} = 35 \quad \text{ریال}$$

و دردفعه دوم:

$$\frac{1050}{x-5} = \frac{1050}{30-5} = \frac{1050}{25} = 42 \quad \text{ریال}$$

بوده است.

مثال ۲ - در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین OAB ( $\hat{O} = 90^\circ$ ) طول هریک از دو ساق OA و OB برابر ۴ است. روی وتر AB از این مثلث نقطه‌ای مانند M طوری تعیین کنید که  $\overline{MA}^2 + \overline{OM}^2 = 28$  باشد.

حل - نقطه M را جواب مسئله و طول OP را  $x$  فرض می‌کنیم.

(P پای عمودی است که از

بر ساق OA فرود آمده است):

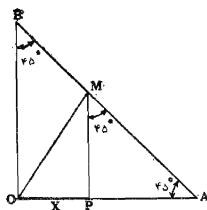
در نتیجه:

$$PA = 4 - x$$

$$PM = PA \quad \text{و}$$

(زیرا مثلث قائم‌الزاویه APM

نیز متساوی‌الساقین است).



و در دو مثلث قائم‌الزاویه APM و OPM روابط زیر برقرار است:

$$\overline{MA}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PM}^2 = 2\overline{PA}^2 = 2(4-x)^2$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + (4-x)^2$$

دورابطه اخیر را عضو بعضو با هم جمع می‌کنیم:

$$(I) \quad \overline{MA}^2 + \overline{OM}^2 = 2(4-x)^2 + x^2$$

اما بنابر فرض :

$$(II) \quad \overline{MA}^2 + \overline{OM}^2 = 28$$

از مقایسه روابط (I) و (II) چنین نتیجه می شود :

$$2(4-x)^2 + x^2 = 28$$

و پس از اختصار :

$$(III) \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

جوابهای معادله (III) عبارتند از :

$$x' = 1 \quad \text{و} \quad x'' = 5$$

این دو جواب از نظر کلی هر دو قابل قبولند اما چون نقطه M باید روی وتر AB و در نتیجه نقطه P روی ضلع OA واقع باشد فقط جواب  $x = 1$  جواب مسئله است .

**تعبیر هندسی** - در هندسه ثابت می کنند که مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل آنها از دو نقطه ثابت O و A مقدار ثابت  $K^2$  باشد محیط دایره ای است بمرکز C ، وسط OA ، و به شعاع

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2K^2 - OA^2}$$

و بخصوص در این مسئله که  $OA = 4$  و  $K^2 = 28$  است مقدار R چنین می شود :  $R = \sqrt{10}$  .

چنانچه به مرکز C و با شعاع  $\sqrt{10}$  دایره ای رسم کنیم ، محل تقاطع دایره با وتر AB جواب مسئله است .

### تمرین

۱- در مثلث قائم الزاویه ای طول وتر ۱۰ متر و تفاضل اضلاع زاویه قائمه ۲ متر است . اضلاع مثلث را پیدا کنید .

۲- مطلوب است طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که مجموع طول وتر با هر يك از اضلاع آن ۱۲ متر و ۸ متر باشد .

۳- مجموع دوعدد صحیح ۲۶ است . هرگاه مربع اولی را از مربع دوبرابر دومی کم کنیم تفاضل ۳۸۰ می شود . آن دوعدد را پیدا کنید .

۴- شخصی مقداری پارچه خرید به مبلغ ۵۴۰۰ ریال ، پیش خود حساب کرد که هرگاه در هر متر ۱۵ ریال تخفیف می گرفت ۱/۵ متر پارچه بیشتر داشت . معین کنید طول پارچه و قیمت يك متر آن را .

۵- مبلغ ۴۰۰۰ ریال را بین چند نفر می خواهیم تقسیم کنیم . در موقع تقسیم سه نفر شرکت نمی کنند . در نتیجه به سهم هر يك از سایرین ۳۰۰ ریال اضافه می شود . تعیین کنید تعداد نفرات اولیه و سهم هر يك را .

۶- چهار عدد صحیح متوالی چنان تعیین کنید که مجموع مربعات آنها ۹۶۶ شود .

۷- مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۵۰ متر مربع و طول وتر آن ۱۵ متر است . اضلاع مثلث را تا يك دهم تقریب حساب کنید .

۸- محیط مثلث قائم الزاویه ای ۱۳۲ متر و مجموع مربعات اضلاع مثلث ۶۰۵۰ می باشد . اضلاع مثلث چقدر است ؟

۹- عددی دورقمی چنان پیدا کنید که مجموع مربعات ارقام آن مساوی با همان عدد به اضافه حاصل ضرب ارقامش باشد و چنانچه ترتیب نوشتن ارقام آن عدد را تغییر دهیم ، عدد حاصل ۳۶ واحد از همان عدد بزرگتر شود .

۱۰- مجموع دودعد ۲۴ ومجموع مربعات آنها از حاصل ضرب آن دودعد ۴۴۴ واحد بیشتر است. آن دودعد کدامند ؟

۱۱- عددی است سه رقمی بین ۵۰۰ و ۶۰۰ ، بطوری که مجموع ارقام آن ۹ است . چنانچه آن عدد را به ترتیب عکس بنویسیم ، عدد حاصل  $\frac{35}{57}$  عدد اولی شود .

۱۲- مجموع ۵ جمله متوالی يك تصاعد هندسی ۲۴۲ ومجموع جمله های اول و سوم و پنجم آن ۱۸۲ است. این تصاعد را مشخص کنید .

۱۳- چند نفر ۱۵۸۰۰ ریال بدهکاری دارند که باید بطور متساوی بپردازند . اگر دوفتر از آنها قادر به پرداخت سهم خود نباشند ، به سهم هریک از دیگران ۹۰۰ ریال اضافه می شود . عدد آنها را تعیین کنید .

۱۴- چند کارگر باید کاری به حجم ۳۲۲ متر مکعب را انجام دهند. اگر ۴ نفر از آنها حاضر به کار نشوند ، بقیه باید هریک ۹ متر مکعب بیشتر کار انجام دهند. عدد آنها را تعیین کنید .

۱۵- حوضی دارای دوشیر A و B است. مدت پرشدن حوض به وسیله شیر A ، ۲۲ دقیقه بیشتر از مدت پرشدن آن به وسیله شیر B است. اگر هر دو شیر A و B باهم باز باشند ، حوض در مدت يك ساعت پر می شود . معین کنید که هر يك از شیرها حوض را بتنهایی در چه مدت پری می کند .

۱۶- شخصی چند متر پارچه به مبلغ ۶۰۰ ریال خرید . اگر با همین مبلغ ۳ متر بیشتر پارچه خریده بود هر متر پارچه ۱۰ ریال ارزانتر محسوب می شد. معین کنید چند متر پارچه خریده است .

۱۷- تناسبی تعیین کنید که جمله اولش ۶ واحد از جمله دوم بیشتر و جمله سومش ۵ واحد از جمله چهارم زیاد تر باشد، در صورتی که مجموع مربعات چهار جمله اش ۷۹۳ است .

۱۸- عددی سه رقمی تعیین کنید که مجموع ارقامش ۱۵ و حاصل ضرب ارقام طرفین آن نیز ۱۵ باشد و عددی که به عکس ترتیب با همان ارقام نوشته شود ۱۹۸ واحد از عدد مطلوب بیشتر است .

۱۹- شخصی يك باغ و يك مزرعه را که مساحت آنها جمعاً يك هکتار و ۵۶ آر است خریداری کرد. قیمت باغ ۱۹۲۰۰ ریال و مزرعه ۱۴۰۰۰ ریال است قیمت يك متر مربع باغ ۱۱ ریال بیش از قیمت يك متر مربع مزرعه ارزش دارد. قیمت يك متر مربع هریک را تعیین کنید .

۲۰- مجموع دو سرمایه ۱۰۰۰۰۰ ریال است. هریک از آنها را بانرخه برابر  $\frac{1}{1000}$  خود به مراحجه داده اند. اگر مجموع سود سالانه آنها ۵۰۵ ریال باشد ، سرمایه ها را تعیین کنید .

۲۱- فاصله دوشهر ۵۸۸ کیلو متر است. ترنی با سرعت معینی ، فاصله دوشهر را طی می کند، اگر سرعت آن  $\frac{15}{8}$  کیلومتر افزایش یابد ، فاصله مذکور را يك ساعت زودتر طی می کند سرعت ترن را حساب کنید .

۲۲- دوشهر به فاصله ۳۶۰ کیلومتر واقعند. دوا تو مو بیل در يك لحظه از يك شهر به طرف شهر دیگر حرکت می کنند. سرعت اولی ۱۵ کیلومتر بیشتر از دومی است و در نتیجه دوساعت زودتر از اولی به مقصد می رسد ، سرعت هریک را معلوم کنید .

۲۳-  $a$  و  $b$  و  $c$  اضلاع مثلث ABC بترتیب عبارتند از  $a=11$  و  $b=8$  و  $c=5$  . مطلوب است تعیین  $x$  (مثبت یا منفی) بقسمی که مثلثی به اضلاع  $a+x$  و  $b+x$  و  $c+x$  قائم الزاویه شود .

۲۴- مثلث ABC قائم در A مفروض است. اگر  $AB+BC=24$  و  $AC+BC=27$  باشد ، اضلاع مثلث را حساب کنید .

۲۵- اضلاع مثلث قائم الزاویه ای تشکیل يك تصاعد هندسی می دهند . اگر وتر آن ۸ باشد ، دضلع دیگر را حساب کنید ، و تحقیق کنید که ارتفاع وارد بر وتر نیز يك جمله از تصاعد مذکور است .

۲۶- مثلث متساوی الاضلاع OAB به ضلع ۶ مفروض است . خطی به موازات AB اضلاع OA و OB یا امتداد آنها را در D و C قطع می کند بقسمی که:  $AC'+CD'+BD'=60$  .

CD را به چه فاصله از AB باید رسم کرد .

۲۷- نیمدایره ای به قطر  $AA' = ۱۶$  و به مرکز O مفروض است؛ مماس بر نیمدایره در یک نقطه مانند M، مماس نقطه A را در B و شعاع عمود بر  $AA'$  را در C قطع می‌کند؛ مطلوب است محاسبه  $AB = x$  بقسمی که محیط دوزننه OABC برابر ۷۴ شود.

۲۸- روی اضلاع AB و BC و CA از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در یک جهت، طولهای  $AA' = BB' = CC' = x$  را جدا می‌کنیم؛ به فرض اینکه ضلع مثلث ABC برابر ۸ باشد، مطلوب است تعیین x بقسمی که:

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{۱۹}{۶۴}$$

مساحت شود.

۲۹- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حساب کنید که محیطش ۸۴ متر و مساحتش ۲۹۴ متر مربع است.

۳۰- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حساب کنید که محیطش ۶ متر و ارتفاعش  $h = ۱/۲$  متر باشد.

۳۱- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حساب کنید که مجموع اضلاع آن، مجموع مکبات اضلاعش  $۱۳/۸۲۴$  باشد.

۳۲- مطلوب است محاسبه اضلاع مثلث ABC که ارتفاع و میانه و نیساز راس A از آن، به ترتیب برابر  $۳/۲۵$  و  $۵$  و  $۳$  باشند.

## رادیگاهای مرکب

مسئله ۱- اعداد منطقی a و  $b'$  و  $a'$  و  $b'$  و عدد اصم  $\sqrt{b}$  مفروضند:

اول- از تساوی: 
$$(۱) \quad a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$$

برابرینهای:  $a = a'$  و  $b = b'$  را نتیجه بگیریم؛

ثانیاً- ثابت کنید تساوی: 
$$(۲) \quad a + \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$$

هیچوقت برقرار نیست.

حل:

اول- واضح است که اگر  $a = a'$  باشد، از تساوی (۱) نتیجه

می‌شود:  $\sqrt{b} = \sqrt{b'}$  یا  $b = b'$ .

حال فرض می‌کنیم  $a \neq a'$  باشد؛ چون  $a'$  را به طرف دیگر تساوی

(۱) نقل کنیم، چنین خواهیم داشت:

(۳) 
$$a - a' + \sqrt{b} = \sqrt{b'}$$

طرفین تساوی (۳) را مجذور می‌کنیم تا حاصل شود:

$$a^2 + a'^2 + b - 2aa' + 2(a - a')\sqrt{b} = b'$$

یا 
$$(۴) \quad 2(a' - a)\sqrt{b} = a^2 + a'^2 - 2aa' + b - b'$$

طرف راست تساوی (۴) عددی است منطقی؛ در نتیجه  $\sqrt{b}$  هم باید

منطقی باشد و این خلاف فرض است؛ پس  $a = a'$  و در نتیجه  $b = b'$ .

۱- این موضوع، در برنامه تحصيلی دبیرستان بطور صریح قید نشده است؛ ولی چون عملاً مورد احتیاج است، به ذکر آن در اینجا می‌پردازیم.

ثانیاً - تساوی (۲) هیچوقت برقرار نیست؛ زیرا پس از اثبات تساوی  $a$  و  $a'$ ، از تساوی (۲) نتیجه می گیریم:  $\sqrt{b} = -\sqrt{b'}$  و این ممکن نیست. رادیکال مرکب - صورت کلی رادیکالهای مرکب چنین است:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

که در آن  $B$  مجذور کامل نیست.

تبدیل رادیکال مرکب به رادیکالهای ساده.

مسئله ۲ - دو عدد مثبت و منطق مانند  $x$  و  $y$  بطریقی تعیین کنید که

داشته باشیم:

$$(۱) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

حل - اگر رابطه (۱) صحیح باشد، باید توان  $m$  از طرفین این رابطه نیز مساوی باشند (فصل دوم - شماره ۲)؛ طرفین رابطه (۱) را مجذور می کنیم:

$$(۲) \quad A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

و از تساوی (۲) بانوجه به مسئله (۱)، نتیجه می شود:

$$(۳) \quad x + y = A$$

$$(۴) \quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{B}$$

$$(۵) \quad x + y = A$$

$$(۶) \quad xy = \frac{B}{4}$$

یعنی مجموع و حاصل ضرب دو عدد مطلوب، بر تیب در روابط (۵) و

(۶) صدق می کنند و بنابراین،  $x$  و  $y$  باید ریشه های معادله درجه دوم:

$$Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0$$

باشند که چون آن را حل کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$Z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$(۷) \quad x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad \text{پس:}$$

$$(۸) \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad \text{و}$$

شرط آنکه این مقادیر  $x$  و  $y$  مناسب با مسئله باشند، این است که این دو مقدار، اولاً مثبت و منطق باشند و ثانیاً به دوطرف روابط (۳) و (۴) که مجذور شده است، يك علامت بدهند.

الف - اعداد  $x$  و  $y$  مثبت خواهند بود اگر  $A^2 - B > 0$  و  $A > 0$  باشد. منطق خواهند بود اگر  $(A^2 - B)$  مجذور کامل باشد.

بنابراین،  $x$  و  $y$  مثبت و منطق خواهند بود اگر  $A$  مثبت و  $(A^2 - B)$  مجذور کامل باشد.

ب - با فرض تحقق دو شرط بالا، دوطرف هر يك از سه رابطه (۳) و (۴) و (۱) يك علامت خواهند داشت، زیرا همگی آنها مثبت خواهند بود.

بطور خلاصه، از بحث بالا چنین نتیجه می شود که اگر  $A$  مثبت و  $(A^2 - B)$  مجذور کامل باشد، مسئله يك جواب خواهد داشت و با فرض برقراری دو شرط اخیر، اگر فرض کنیم  $A^2 - B = C^2$  باشد، روابط (۷) و (۸) به صورت زیر درمی آیند:

$$x = \frac{A + C}{2}$$

$$y = \frac{A - C}{2}$$

و در نتیجه روابط (۱) چنین می شوند:

$$(۹) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{r}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{r}} =$$

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{r}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{r}}$$

موارد استعمال :

$$I - \text{معادله } ۰ = x^2 - ۱۶x^2 + ۳ \text{ را حل کنید.}$$

حل :

$$x^2 = y$$

$$x^2 = y^2$$

$$\text{معادله حلال : } y^2 - ۱۶y + ۳ = ۰$$

$$y = ۸ \pm \sqrt{۶۴ - ۳}$$

$$\sqrt{y} = ۸ + \sqrt{۶۰}$$

$$\sqrt{y} = ۸ - \sqrt{۶۰}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \pm \sqrt{۸ + \sqrt{۶۰}} \\ x'' = \pm \sqrt{۸ - \sqrt{۶۰}} \end{array} \right. \quad \text{در نتیجه :}$$

بطوری که ملاحظه می شود، جوابها به صورت رادیکال مرکب می باشند که در صورت امکان، باید آنها را به صورت رادیکالهای ساده بنویسیم؛ ابتدا ملاحظه می کنیم که :

$$A^2 - B = C^2$$

$$C^2 = ۶۴ - ۶۰ = ۴$$

چون در این مسئله A مثبت و عدد (A^2 - B) یعنی ۴ مجذور کامل است، تبدیل رادیکالهای مرکب نامبرده به رادیکالهای ساده میسر است و با استفاده از روابط (۹)، چنین خواهیم داشت :

$$x' = \pm \sqrt{۸ + \sqrt{۶۰}} = \pm \left( \sqrt{\frac{۸+۲}{r}} + \sqrt{\frac{۸-۲}{r}} \right) = \pm (\sqrt{۵} + \sqrt{r})$$

$$x'' = \pm \sqrt{۸ - \sqrt{۶۰}} = \pm \left( \sqrt{\frac{۸+۲}{r}} - \sqrt{\frac{۸-۲}{r}} \right) = \pm (\sqrt{۵} - \sqrt{r})$$

II - به فرض آنکه x عددی مثبت باشد، رادیکال مرکب زیر را به

رادیکالهای ساده تبدیل کنید :

$$y = \sqrt{x^2 + x + ۱} + \sqrt{2x^2 + x^2 + 2x}$$

$$A = x^2 + x + ۱, B = 2x^2 + x^2 + 2x$$

$$C^2 = A^2 - B = (x^2 + x + ۱)^2 - (2x^2 + x^2 + 2x)$$

$$C^2 = x^2 + 2x^2 + ۱ = (x^2 + ۱)^2$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + x + ۱ + x^2 + ۱}{r}} + \sqrt{\frac{x^2 + x + ۱ - x^2 - ۱}{r}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{r}} + \sqrt{\frac{x}{r}}$$

تمرین

رادیکالهای مرکب زیر را به ساده ترین صورت تبدیل کنید :

$$1 - \sqrt{7 + 2\sqrt{7}} \quad -2 \quad \sqrt{2 + \sqrt{7}}$$

$$2 - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} \quad -3 \quad \sqrt{5 - \sqrt{7}}$$

$$3 - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \quad -4 \quad \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$4 - \sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}} \quad -5 \quad \sqrt{28 + 5\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{a^r c + b d^r + 2 a d \sqrt{c b}} \quad -۹$$

$$\sqrt{2 a + 2 \sqrt{a^r - b^r}} \quad -۱۰$$

$$\sqrt{\frac{2 a}{b} + \sqrt{\frac{2 a^r c^r}{b d^r} - \frac{2 a^r c^r}{d^r}}} \quad -۱۱$$

$$\sqrt{x + 2 \sqrt{x - 1}} \quad -۱۲$$

$$\sqrt{b^r - a b + \frac{a^r}{r} + \sqrt{2 a b^r - 2 a^r b^r + a^r b}} \quad -۱۳$$